数学序論に対する追加説明 $\sharp 3$

- 何度か言っているが**結果**だけ記すのではなく，理由を書くこと。
- 集合と命題，$\cap, \cup$ と $\wedge, \vee$ を混同している人がいる。

  集合に真偽はないので，集合は命題ではない。$\wedge, \vee$ は 2 つの命題を結びつける記号なので A, B が集合のとき

  $$A \wedge B$$

  などという記法は間違いである。ここではこのような間違いを**文法間違い**と呼んでおく。
- 文法間違いをおかしている解答は，内容を見るまでもなく間違いである。

  $\cap, \cup$ は集合を結びつける記号であり，$\wedge, \vee$ は命題を結びつける記号である。

  A, B が集合のとき

  $$A \cap B, \qquad A \cup B$$

  という書き方はあるが，

  $$A \wedge B, \qquad A \vee B$$

  という書き方はない。

  P, Q が命題のとき

  $$P \wedge Q, \qquad P \vee Q$$

  という書き方はあるが，

  $$P \cap Q, \qquad P \cup Q$$

  という書き方はない。
- ただし集合と命題の間に関係はある。x と集合 A に対し

  $$x \in A$$

  は「x は集合 A の元である」という命題 (関数) である。$\cap, \cup$ と $\wedge, \vee$ の間には

  $$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}, \quad A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

  という対応関係がある。

- ベン図は考えるとき役に立つが，ベン図のみで証明にはならない。

  ベン図を証明し使うためには，そのベン図が「正当である」ことの証明が必要になる。

- $\{3k+2 \wedge 5k+3 \mid k \in \mathbb{N}\}$ も文法間違いである。$3k+2$ 等は数であって命題ではない。

- 真理値表を用いて証明をしている人がいたが，文法間違いをおかしていた。命題が入るべきところに集合 A, B 等を書いて真理値表を書いてあったので，これもやはり集合と命題の混同である。

  ただし，集合 A 等の部分を $x \in A$ (これは命題関数) に替えれば正しい証明にすることができる。

- 演習問題 2.2 (2) を解説する。

  問題は「3 で割ると余りが 2 となるような自然数全体の集合」を求めよというものであった。

  (1)–(3) は結果のみ書いてある解答でも間違いとはいえないが，ここは集合の記号に慣れることが目的なので，詳しく (しつこく) 解説しておく。

  結論は $A = \{3k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ である。

- この問題に関連する集合の基本事項は

  $$\boxed{A = B \iff A \subseteq B \wedge A \supseteq B}$$

  および

  $$\boxed{A \subseteq B \iff \text{「}\forall a \;\; a \in A \implies a \in B\text{」}}$$

  である。

- 自然数 (整数) n を p で割った余りが r という事は

  $$\exists q \in \mathbb{Z} \quad n = pq + r \qquad (0 \leq r < p)$$

  と表される。

  よって 3 で割った余りが 2 である自然数の集合は

  $$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = 3k+2\}$$

  となる。

- $A = \{ 3k-1 \mid k \in \mathbb{N} \}$ とおくとき $A = B$ を示せばよい。

$$A = B \iff A \subseteq B \wedge A \supseteq B$$

  なので $A \subseteq B$ および $A \supseteq B$ を示す。

- 最初に $A \subseteq B$ を示す。そのためには

$$\forall a \quad a \in A \implies a \in B$$

  を示せばよい。

- a を A の任意の元とすると，ある自然数 $k \in \mathbb{N}$ が存在して $a = 3k-1$ と書ける。$k \geq 1$ より $3k-1 \geq 2 > 0$ となるので，a は自然数である。

  また
$$a = 3k-1 = 3(k-1)+2$$
  であり，$k-1 \in \mathbb{Z}$ である。

  よって $a \in B$ となり，$A \subseteq B$ が成立する。

- 次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とすると，a は自然数であり，ある整数 k が存在して，$a = 3k+2$ となる。

  ここで $k < 0$ とすると $k \leq -1$ なので

$$a = 3k+2 \leq -3+2 = -1 < 0$$

  となる。これは a が自然数であることに矛盾するので，$k \geq 0$ である。

  よって $j = k+1$ とおくと $j \in \mathbb{N}$ であり，

$$a = 3k+2 = 3(j-1)+2 = 3j-1$$

  となる。

  よって $a \in A$ となり，$B \subseteq A$ が示された。以上により $A = B$ が成立する。

- 次に (4) を考える。

  3 で割ると余りが 2 であり，5 で割ると余りが 3 である集合を少し調べてみると，15 で割ると 8 余る集合になっていることが予想される。

- 結論は $A = \{15k - 7 \mid k \in \mathbb{N}\}$ である。

  この段階では予想なのできちんとした証明が必要である。

- $B = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k_1 \in \mathbb{Z}\ x = 3k_1 + 2, \exists k_2 \in \mathbb{Z}\ x = 5k_2 + 3\}$ とするとき $A = B$ を示す。

- 最初に $A \subseteq B$ を示す。

  a を A の任意の元とする。$a = 15k - 7\,(k \in \mathbb{N})$ と書かれているので，$a = 3(5k-3) + 2$ と書き直すことができる。ここで $5k - 3 \in \mathbb{Z}$ である。また $a = 5(3k-2) + 3$ と書ける。ここで $3k - 2 \in \mathbb{Z}$ である。また $k \geq 1$ より $a = 15k - 7 \geq 15 - 7 = 8 > 0$ なので a は自然数である。以上により $a \in B$ が示される。よって $A \subseteq B$ が成立する。

- 次に $B \subseteq A$ を示す。a を B の任意の元とする。3 で割ると余りが 2 なので，ある整数 k_1 が存在して $a = 3k_1 + 2$ と書ける。5 で割ると余りが 3 なのである整数 k_2 が存在して $a = 5k_2 + 3$ と書ける。

- k_2 を 3 で割った余りを r とすると，ある整数 j が存在して $k_2 = 3j + r$ と書ける。$r = 0$ または 1，2 である。

  $$\begin{aligned} a &= 5k_2 + 3 = 5(3j + r) + 3 = 3 \cdot 5j + 3r + 2r + 3 \\ &= 3(5j + r + 1) + 2r \end{aligned}$$

  $r = 0$ のとき a が 3 で割り切れるので矛盾。$r = 2$ のとき a を 3 で割ったあまりは 1 なので矛盾。よって $r = 1$ である。

  このとき

  $$a = 5k_2 + 3 = 5(3j + 1) + 3 = 15j + 8 = 15(j + 1) - 7$$

  となる。$k = j + 1$ とおく。$j < 0$ のとき $j \leq -1$ なので

  $$a = 15j + 8 \leq -15 + 8 = -7 < 0$$

  となり a が自然数であることに矛盾，よって $j \geq 0$ である。このとき $k \in \mathbb{N}$ となる。よって $a \in A$ であり，$B \subseteq A$ が成立する。よって $A = B$ が示された。

- 演習問題 2.4 (2) について解説する。問題は

  「$\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ でないことを**定義に基づいて**証明せよ」

  である。

- この問題は集合の包含関係の定義の理解を確認する問題である。

  この問題を考えるためには「命題と論理」の章で学んだ「$P \implies Q$」の否定命題を書けることが必要である。

  $P \implies Q$ の否定命題は

  $$P \wedge \neg Q$$

  である。

- 先に述べたように

  $$A \subseteq B \iff \text{「}\forall a \quad a \in A \implies a \in B\text{」}$$

  なので

  $$A \not\subseteq B \iff \text{「}\exists a \quad a \in A \wedge a \notin B\text{」}$$

  である。すなわち「$A \subseteq B$」を否定するには A の元で B の元でないものを見つければよい。

- $-1 \in \mathbb{Z}$ であり $-1 \notin \mathbb{N}$ なので $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$ である。

- 演習問題 2.7 (1) を解説する。

  $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

  を証明せよ，という問題である。

- すでに述べているように集合の基本事項は

  $$\boxed{A = B \iff A \subseteq B \wedge A \supseteq B}$$

  および

  $$\boxed{A \subseteq B \iff \text{「}\forall a \ a \in A \implies a \in B\text{」}}$$

  である。

- この問題では，共通部分と和集合の定義を知っていることが必要である。

  $$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}$$

  および

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

である。

- これらに加え 1.1 節で学んだ論理の分配法則を使用する。論理の分配法則とは P, Q, R を命題とするとき

$$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

である。

- x を集合の元とする。

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \wedge x \in B \cup C \\
&\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\
&\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\
&\iff x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\
&\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$

よって示された。

- 内容的には同じことだが，集合のイコールで変形していく書き方もある。

$$\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B \cup C\} \\
&= \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \\
&= \{x \mid (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} \\
&= \{x \mid x \in A \cap B \vee x \in A \cap C\} \\
&= (A \cap B) \cup (A \cap C)
\end{aligned}$$