数学序論に対する追加説明 $\sharp 4$

- 写像の全射・単射について概括的な説明をする。
- 何度か言っているが，演習問題に解答するとき，**結果**だけ記すのではなく，必ず理由を書くこと。
- 文法間違いをおかしている解答は，内容を見るまでもなく間違いである。
- 用語の定義を理解していることが解答を考える前提である。定義を理解してない状態で何を考えても結論にはたどり着かない。

  定義が分からなければ定義を書いてあるところを熟読すること。
- 解答を書いた後で必ず推敲をすること。推敲は書いた自分の眼でなく，他人の眼で行うこと。他人の眼で読んで論旨が理解できるなら，さしあたり十分な解答と考えてよい。
- これに関連して「自明」「明らか」という用語について一言。数学では「自明」・「明らか」という用語は「私はこのことを証明できるが，今は面倒なので，証明しない」という意味で使われる。だから**学生はこの用語を使用してはいけない**。
- 演習問題 2.19 を解説する。

  問題は与えられた写像が単射かどうか，また全射かどうかを判定するというものである。最初に単射について考える。

  写像 $f : X \longrightarrow Y$ が単射であることの定義は

  $$\forall x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2) \tag{1}$$

  である。これが成立するかどうかを調べればよい。(1) の対偶をとって

  $$\forall x_1, x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

  を示してもよい。

  否定を示すためには背理法を用いるか

  $$\exists x_1, x_2 \in X \quad x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$$

  を示せばよい。

- (1) は $X=\{1,2,3\}$ であり，$f:X\longrightarrow X$ は $f(1)=2, f(2)=1, f(3)=3$ で定義されている。$x_1\neq x_2$ となる $\{x_1,x_2\}$ がすべて $f(x_1)\neq f(x_2)$ ならば単射であり，$f(x_1)=f(x_2)$ となる $\{x_1,x_2\}$ が存在すれば単射ではない。

- 今の場合 X は有限集合なので，$x_1\neq x_2$ となる $\{x_1,x_2\}$ は $\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}$ の 3 組である。この 3 組を調べればよい。
  $\{1,2\}$: $f(1)=2\neq 1=f(2)$
  $\{1,3\}$: $f(1)=2\neq 3=f(3)$
  $\{2,3\}$: $f(2)=1\neq 3=f(3)$
  すべての $\{x_1,x_2\}$ に対し $f(x_1)\neq f(x_2)$ が成立するので，f は単射である。

- (2) は $X=\{1,2,3,4\}$，$Y=\{1,2,3\}$ であり，$f:X\longrightarrow Y$ は $f(1)=2, f(2)=1, f(3)=3, f(4)=1$ で定義されている。$2\neq 4$ であり $f(2)=1=f(4)$ なので単射ではない。

  単射でないことを示すためには満たさない例を 1 組見つければよい。

- (5) は $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ であり，$f(x)=x^2$ で定義されている。

- 前 2 例は X が有限集合なので，単射であることを示すためにはすべての元を列挙すれば分かったが，無限集合の場合はそうはいかない。写像の性質を用いて示す必要がある。

- f が単射であることを示す。x_1,x_2 を $[0,\infty)$ の任意の元で $x_1\neq x_2$ をみたすものとする。$f(x_1)\neq f(x_2)$ を示せばよいが，結論を否定して背理法で示す。

- $f(x_1)=f(x_2)$ と仮定すると $f(x)=x^2$ より

$$0=f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1-x_2)(x_1+x_2)$$

  となる。$x_1-x_2\neq 0$ より

$$x_1+x_2=0$$

  を得るが，$x_1,x_2\geq 0$ より $x_1=0, x_2=0$ となる。$x_1=x_2$ なのでこれは矛盾，よって単射が示される。

- X が無限集合の場合でも単射でないことを示すには $f(x_1) = f(x_2)$ になる元 x_1, x_2 $(x_1 \neq x_2)$ を 1 組見つければよい。

- (3) は $f : \mathbb{R} \longrightarrow [\,-1, 1\,]$ であり，$f(x) = \sin x$ で定義されている。

- 三角関数の性質を知っていれば $f(\pi) = 0 = f(0)$ かつ $\pi \neq 0$ なので，f は単射でない。

- $f : X \longrightarrow Y$ が全射であることの定義は
$$f(X) = Y$$
であった。値域 $f(X)$ の定義は
$$\{\, f(x) \mid x \in X \,\}$$
または同じことだが
$$\{\, y \in Y \mid \exists x \in X \quad y = f(x) \,\}$$
である。

- f の終域が Y ならば写像の定義から
$$f(X) \subseteq Y$$
をみたすので，全射を示すためには
$$f(X) \supseteq Y$$
を示せばよい。論理記号を用いて書くと
$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \qquad y = f(x)$$
を示せばよい。

- 全射でないことを示すには前項の否定すなわち
$$\exists y \in Y \quad \forall x \in X \qquad y \neq f(x)$$
を示せばよい。

- (1) は $X = \{1, 2, 3\}$ であり，$f : X \longrightarrow X$ は $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3$ で定義されていた。

  有限集合の場合の $f(X)$ はすべての元を列挙することで得られる。

$$
\begin{aligned}
f(X) &= \{ f(x) \mid x \in X \} = \{ f(1), f(2), f(3) \} \\
&= \{ 2, 1, 3 \} = \{ 1, 2, 3 \} = X
\end{aligned}
$$

  よって f は全射である。

- (2) は $X = \{1, 2, 3, 4\}$，$Y = \{1, 2, 3\}$ であり，$f : X \longrightarrow Y$ は $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 1$ で定義されていた。

$$
\begin{aligned}
f(X) &= \{ f(1), f(2), f(3), f(4) \} = \{ 2, 1, 3, 1 \} \\
&= \{ 1, 2, 3 \} = Y
\end{aligned}
$$

  よって f は全射である。

- (6) は $f : [\, 0, \infty\,) \longrightarrow [\, 0, \infty\,)$ は $f(x) = x^3$ で定義されている。結論的には f は全射である。このことを示すには $X = [\, 0, \infty\,), Y = [\, 0, \infty\,)$ とするとき $Y \subseteq f(X)$ を示せばよい。すなわち Y の任意の元 y に対しそれが $f(X)$ に入ること，または同じことだが，ある元 $x \in X$ が存在して $y = f(x)$ となることを示せばよい。

- これを示すのに関数 $y = \sqrt[3]{x}$ の存在は既知としてよいとの注意があった。

  $y \in [\, 0, \infty\,)$ を任意の元とすると $y \geq 0$ である。このとき $x = \sqrt[3]{y}$ とおくと $x \geq 0$ なので $x \in [\, 0, \infty\,)$ である。

  また

$$
f(x) = x^3 = (\sqrt[3]{y})^3 = y
$$

  となるので $y \in f([\, 0, \infty\,))$ となり全射が示される。

- 最後に新しい問題を考える。

  $f : [\, 0, \infty\,) \longrightarrow [\, 0, \infty\,)$ を $f(x) = x^4$ で定義する。f が全射であるかどうか調べよ。また f が単射であるかどうか調べよ。ただし関数 $y = \sqrt{x}$ は既知としてよい。

- [**単射性**] $x_1, x_2 \in [\,0, \infty\,)$ を $x_1 \neq x_2$ を満たす任意の元とする。$f(x_1) = f(x_2)$ が成立していると仮定する。

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1) - f(x_2) = x_1^4 - x_2^4 = (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) \end{aligned}$$

  であり，$x_1 - x_2 \neq 0$ より $x_1 + x_2 = 0$ または $x_1^2 + x_2^2 = 0$ が成立する。$x_1, x_2 \geq 0$ よりこれが成立するのは $x_1 = 0, x_2 = 0$ のときのみで $x_1 = x_2$ となる。これは矛盾なので f は単射である。

- [**全射性**] 任意の $y \in [\,0, \infty\,)$ に対し $x = \sqrt{\left(\sqrt{y}\right)}$ とおくと $x \in [\,0, \infty\,)$ であり

$$f(x) = \left(\sqrt{(\sqrt{y})}\right)^4 = \left(\left(\sqrt{(\sqrt{y})}\right)^2\right)^2 = (\sqrt{y})^2 = y$$

  より $y \in f([\,0, \infty\,))$ となる。よって f は全射である。