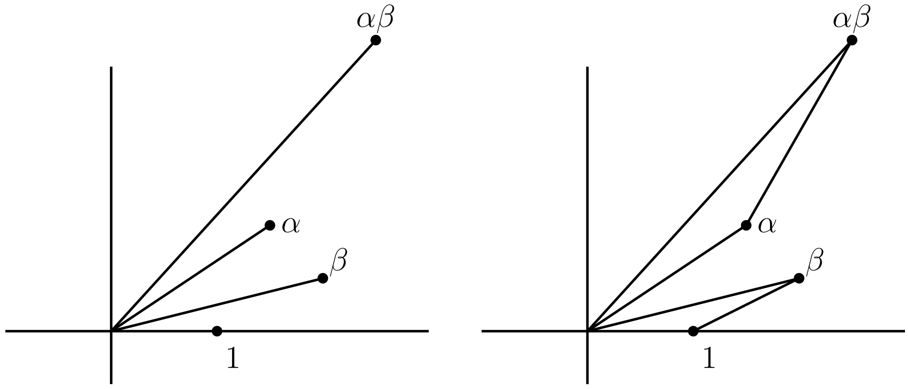
数学序論に対する追加説明 $\sharp 5$

- 最初は複素数について追加説明をする。
- 複素数の積を図示する問題を考える。



- 上図はどのように作図したかを書いていないので解答としては不十分である。
- $0, 1, \alpha, \beta$ に対応する点をそれぞれ O, E, A, B とする。そして $\alpha\beta$ に対応する点を P とすると，$\triangle OEB$ と $\triangle OAP$ が相似になることが基本的である。

  このことが理解できていない人もいるようなので，再度説明しておく。
- $\alpha = re^{i\theta}$ とする。$\alpha_1 = e^{i\theta}, \alpha_2 = r$ とおくと，α を掛けることは，α_1 を掛け，その結果に α_2 を掛けることなので 2 段階に分けて考える。

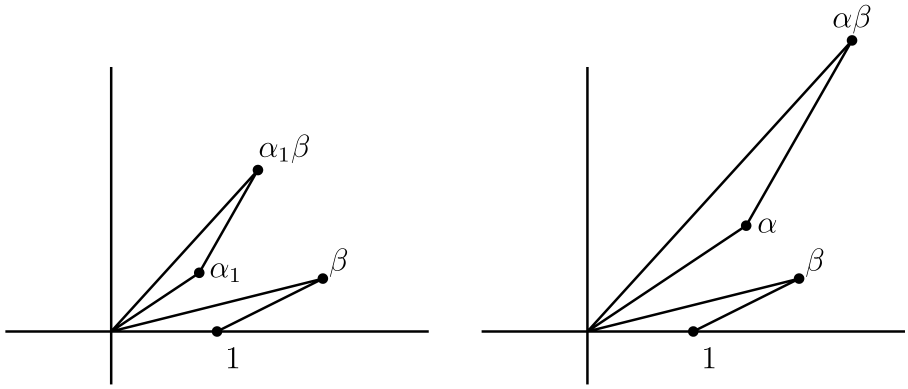
  一般に絶対値 s，偏角 φ の複素数 $z = se^{i\varphi}$ に α_1 をかけると

$$\alpha_1 z = se^{i(\theta+\varphi)}$$

  となる。これは幾何的に考えると原点を中心に角度 θ だけ回転させることになる。

  回転移動した図形はもとの図形と合同である。$\alpha_1 \cdot 0, \alpha_1 \cdot 1, \alpha_1 \cdot \beta$ に対応する点をそれぞれ O_1, E_1, B_1 とすれば $\triangle OEB$ と $\triangle O_1E_1B_1$ は合同である。

  この様に絶対値 1 の複素数を掛けることは，複素平面では偏角だけ回転させることになる。



この結果に α_2 を掛ける。$\alpha_2 = r$ なので複素平面では原点を中心に長さを r 倍することになる。この変換で長さは r 倍になるが形は変わらない。よってこの変換は相似変換である。

α を掛けることは，α_1 を掛けて，α_2 を掛けることである。この変換は α の偏角だけ回転移動を行い，引き続き r 倍する相似変換を行ったものなので，全体は相似変換になる。

即ち $\triangle OEB$ と $\triangle OAP$ は相似であることが分かる。

- なお演習問題解説は $\triangle OEB$ と線分 OA が与えられているとき，定規とコンパスにより $\triangle OEB$ と相似な $\triangle OAP$ が作図できることは前提にしている。実際に作図ができない人は中学 (?) でやった作図を復習すること。

- 次に三角関数について述べる。多くの人が加法定理を用いて証明しているので，ここでは新参者のオイラーの公式及び指数法則を用いる方法のメリットを宣伝しておく。

- 勿論オイラーの公式と指数法則を用いなければいけないという訳ではないが，便利なので慣れておおいに使用してほしいと思って解説する。

- オイラーの公式の 1 つのメリットは一度に $\sin, \cos$ の両方の証明ができるし見通しもよいことである。例として 3 倍角の公式を証明する。オイラーの公式より

$$e^{i3x} = \cos 3x + i \sin 3x \tag{1}$$

と書ける。指数法則を用いると

$$\begin{aligned} e^{3x} &= \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos x + i \sin x)^3 \\ &= \cos^3 x + 3\cos^2 x\,(i \sin x) + 3\cos x\,(i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 \\ &= \left(\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x\right) + i\left(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x\right) \end{aligned}$$

式 (1) と比較して

$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x, \quad \sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

を得る。このままでもよいが，

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

を用いると $\cos x$ または $\sin x$ だけの式にできるので通常は

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \qquad \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

と表す。

- 講義では扱ってないが 4 倍角の公式を導いてみよう。

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4$$

を使用する。

$$e^{i4x} = \cos 4x + i\sin 4x \tag{2}$$

である。

$$\begin{aligned}
e^{i4x} &= \left(e^{ix}\right)^4 = (\cos x + i\sin x)^4 \\
&= \cos^4 x + 4\cos^3 x\,(i\sin x) + 6\cos^2 x\,(i\sin x)^2 + 4\cos x\,(i\sin x)^3 + (i\sin x)^4 \\
&= \left(\cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x\right) + i\left(4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x\right)
\end{aligned}$$

式 (2) と比較して

$$\begin{aligned}
\cos 4x &= \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x \\
\sin 4x &= 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x
\end{aligned}$$

となる。

- メリットの 2 つ目は i が入っていることによりある程度形が予想できることである。$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ と $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ より

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{3}$$

となる。$\cos x$ は明示的には i を含んでないのに対し，$\sin x$ は i を含んでいる。

積和公式

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right\}$$

が必要なときに正確に思い出せないとしよう。

このとき式 (3) を知っていれば,

$$\begin{aligned}\sin\alpha\sin\beta &= \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\cdot\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i}\\ &= -\frac{1}{4}\left\{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right\}\left\{e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right\}\end{aligned}$$

と変形できる。最後の式は明示的には i を含んでいないので $\sin$ ではなく $\cos$ を使って書けると予想できる。

- 別の積和公式

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right\}$$

を考える。前と同様に計算すると

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta &= \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\cdot\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2}\\ &= \frac{1}{4i}\left\{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right\}\left\{e^{i\beta}+e^{-i\beta}\right\}\end{aligned}$$

となる。i を分母に明示的に含んでいるので $\cos$ ではなく $\sin$ で書けると予想できる。

- 積和公式，和積公式を導くためには予想ではなく計算する必要がある。これも式 (3) を用いると

$$\begin{aligned}2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} &= 2\frac{e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}-e^{-i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}}{2i}\cdot\frac{e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}}{2}\\ &= \frac{1}{2i}\left\{e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\beta}{2}}\right\}\left\{e^{i\frac{\alpha}{2}}e^{-i\frac{\beta}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}e^{i\frac{\beta}{2}}\right\}\\ &= \frac{1}{2i}\left\{e^{i\alpha}-e^{-i\beta}+e^{i\beta}-e^{-i\alpha}\right\}\\ &= \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}+\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i}\\ &= \sin\alpha+\sin\beta\end{aligned}$$

となる。