# 数学序論に対する追加説明 $\sharp 6$

- 指数法則の証明について追加説明をする。
- そもそも数学的帰納法に対する理解が十分でない人が若干いる。このような人は要綱第 1 章を復習すること。
- 数学的帰納法を理解していても，指数法則の様な基本的な事実の証明には「示すべき事実」を証明中に使ってしまう場合がある。そのような解答も多く見られた。
- [**間違った解答の一例**] **：**$a^{m+n} = a^m a^n$ を $P(k)$ とおく。

$$a^k a^{k'} = a^{k+k'}$$

を仮定する。$m = k+1, n = k'+1$ のとき，

$$a^m a^n = a^{k+1} a^{k'+1} = a^{k+k'+2} = a^{m+n}$$

- この例では $m$ と $n$ の両方を動かしていることも問題だが,「指数法則」の証明に「指数法則」を使用している点が根本的な問題である。
- 数学的帰納法の証明中に使用してよい事実は
  (1) 定義
  (2) すでに証明された事実
  (3) 帰納法の仮定

  の 3 つである。
- この様な間違いをしないためには，(1) 帰納法で証明すべき命題を明確にする，(2) その等号がなぜ成立するかを意識することが大切である。
- 任意の自然数 $m, n$ に対して

$$a^{m+n} = a^m a^n$$

が成立することを数学的帰納法で証明しよう。

そのために数学的帰納法で証明すべき命題 $P(k)$ を明確にしよう。「任意の自然数 $m$ に対し $a^{m+k} = a^m a^k$ が成立する。」という命題を $P(k)$ とする。

- まず $P(1)$ が成立することを示す。定義より $a^1 = a$ であることを注意しておく。

  任意の自然数 $m$ を考える。

$$\begin{aligned} a^{m+1} &= a^m \cdot a && \text{(定義)} \\ &= a^m\, a^1 && \text{(定義)} \end{aligned}$$

  より $P(1)$ は成立している。

- $P(k)$ の成立を仮定する。即ち任意の自然数 $m$ に対し $a^{m+k} = a^m a^k$ を仮定する。

$$\begin{aligned} a^{m+(k+1)} &= a^{(m+k)+1} && \text{(結合法則)} \\ &= a^{m+k} a && \text{(定義)} \\ &= \left(a^m a^k\right) a && \text{(帰納法の仮定)} \\ &= a^m \left(a^k a\right) && \text{(結合法則)} \\ &= a^m a^{k+1} && \text{(定義)} \end{aligned}$$

  となり $P(k+1)$ も成立している。よって示された。

- 次に任意の自然数 $m, n$ に対し $(a^m)^n = a^{mn}$ を示す。

  命題 $Q(k)$ を

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad (a^m)^k = a^{mk}$$

  とする。$a^m a^n = a^{m+n}$ は今証明したので使用してもよいことを注意しておく。$n = 1$ のときは

$$\begin{aligned} (a^m)^1 &= a^m && \text{(定義)} \\ &= a^{m \cdot 1} && (m = m \cdot 1) \end{aligned}$$

  より $Q(1)$ は成立する。

- $Q(k)$ の成立を仮定する。即ち「$\forall m \in \mathbb{N} \quad (a^m)^k = a^{mk}$」を仮定する。

$$\begin{aligned} (a^m)^{k+1} &= (a^m)^k\, a^m && \text{(定義)} \\ &= a^{mk} a^m && \text{(帰納法の仮定)} \\ &= a^{mk+m} && \text{(指数法則)} \\ &= a^{m(k+1)} && \text{(分配法則)} \end{aligned}$$

  となり $Q(k+1)$ も成立している。よって示された。