数学序論に対する追加説明 $\sharp 7$

- 数列の極限の求め方に関し種々のことを学んだので整理しておこう。

- 基本になる数列の極限は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0 \qquad k\in\mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty}a^n=\begin{cases}\infty & a>1\\ 0 & -1<a<1\end{cases}$$

- 次の極限も基本的であるが，これ自身を証明させる問題もあるので，その場合は使用してはいけない。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0 \qquad k\in\mathbb{N},\quad a>1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \qquad a>1$$

- 数列の和の極限が極限の和になる等代数的計算との可換性も基本的であるが，前提事項と考える。

- 数列の極限を求めるとき有効な方法の一番目は，不定形の極限の場合

  (1) 分母の増大度最大と思われる項で分母分子を割る

  という方法である。

  この方法で不定形でなくなれば極限の商が使用可能になる。

- 例を考える。

$$a_n=\frac{3n^2}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^3+n^2}}$$

の極限を求める。分母の増大度最大の項は $\sqrt{n^4+n}$ と考えられる。これで割ってもよいのだが，より簡単な $\sqrt{n^4}=n^2$ で割る。

$$a_n=\frac{3\dfrac{n^2}{n^2}}{\dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^3+n^2}\right)}=\frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^3}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}$$

最後の式は不定形ではないので

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^3}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}$$

$$= \frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n^3}}+\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}$$

$$= \frac{3}{1+0} = 3$$

- 2 番目は

  (2) はさみうちの定理

  である。これは a_n の極限を求めるときに

  (1) $b_n \leq a_n \leq c_n$ および
  (2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

  となる数列を見つければ，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ が分かるという定理である。

- $a > 1$ として

$$a_n = \frac{n}{a^n}$$

  の極限を求める。指数関数の方が増大度が大きいので極限は 0 になると思われるが，今はそれを証明する問題なので，この事実を使用してはいけない。

- $0 \leq a_n$ なので $a_n \leq c_n$ となる数列 $\{ c_n \}$ で $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$ となるものを見つければよい。

  n の式 $f(n)$ で

  (1) $a^n \geq f(n)$
  (2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{f(n)} = 0$

  を満たすものが見つかれば

$$0 \leq a_n \leq \frac{n}{f(n)}$$

  となりはさみうちの定理より $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ が示される。

  n の 2 次式以上の式 $f(n)$ で $a^n \geq f(n)$ となるものを見つければ上が成立する。

- 2 項定理

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i x^{n-i} y^i$$

を用いる。

${}_nC_2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ は n の 2 次式であることに注意する。

$a = 1 + h$ とおくと $a > 1$ より $h > 0$ である。

$$\begin{aligned} a^n = (1+h)^n &= \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i h^i \geq \sum_{i=0}^{2} {}_nC_i h^i \\ &= {}_nC_0 h^0 + {}_nC_1 h^1 + {}_nC_2 h^2 \geq {}_nC_2 h^2 = \frac{n(n-1)h^2}{2} \end{aligned}$$

$f(n) = \dfrac{n(n-1)h^2}{2}$ とおくと

$$0 \leq \frac{n}{a^n} \leq \frac{2n}{n(n-1)h^2} = \frac{2}{(n-1)h^2}$$

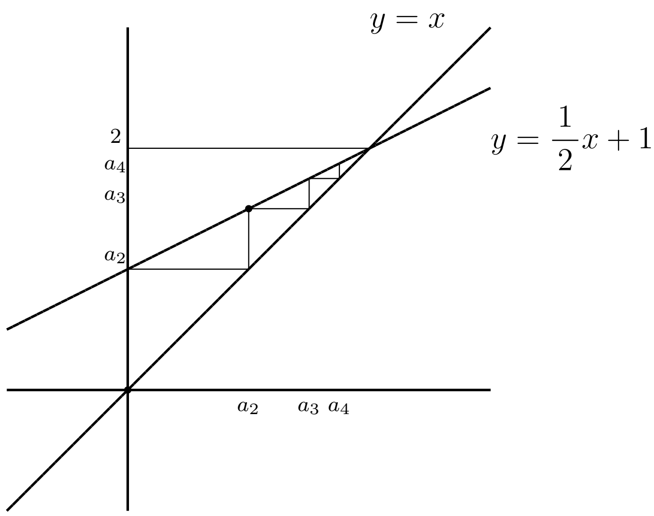
となり $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となる。

- 3 番目は

(3) 有界な単調数列は収束する

という定理を使用する方法である。

この定理を用いると，収束するということの証明と，極限値を求めることとを分けることができる。複雑な数列には有功な方法である。



次の漸化式で定義される数列を考える。

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \qquad\qquad a_1 = 0 \tag{1}$$

この数列の一般項を求めて極限を求める方法もあるが，ここでは上の定理を使う。

- $\{\, a_n \,\}$ が有界な単調数列であることが示されたとき，極限は次のように求めることができる。

  極限値を α とする。漸化式 (1) において $n \to \infty$ とすると

  $$\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 1$$

  となり，これを解いて $\alpha = 2$ となる。

- これで証明が終わったと勘違いしないように。収束性の証明がないときはこの議論は正しくない場合もあり正当化できない。よって以下で収束性を示す。

- 単調性については

  $$a_{n+1} - a_n \geq 0$$

  が成立することを数学的帰納法で示す。$n = 1$ のときは $a_2 = 1$ なので

  $$a_2 - a_1 = 1 - 0 = 1 \geq 0$$

  で成立している。$n = k$ のとき成立を仮定する。すなわち

  $$a_{k+1} - a_k \geq 0$$

  を仮定する。

  $$a_{k+2} - a_{k+1} = \left(\frac{1}{2}a_{k+1} + 1\right) - \left(\frac{1}{2}a_k + 1\right) = \frac{1}{2}\big(a_{k+1} - a_k\big) \geq 0$$

  となり $k + 1$ でも成立するので，すべての自然数 n で成立する。

- 有界性についてはすべての自然数 n に対し $a_n \leq 2$ が成立することを数学的帰納法で示す。

  $n = 1$ のとき $a_1 = 0 \leq 2$ で成立している。

k のとき成立を仮定する。すなわち $a_k \leq 2$ を仮定する。これより $\dfrac{1}{2}a_k \leq \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1$ であり，この式の両辺に 1 を加えると

$$\frac{1}{2}a_k + 1 \leq 2$$

よって $a_{k+1} \leq 2$ が成立する。