数学序論に対する追加説明 $\sharp 8$

- 「定義にもとづいて導関数を求めよ」という問題と「導関数を求めよ」という問題の区別がついていない人がいるので説明しておく。
- 「定義にもとづいて導関数を求めよ」という問題は**「定義にもとづいて」**計算しなければいけない。
- 「定義にもとづいて $y = f(x) = x^2$ の導関数を求めよ」という問題の場合

  $$\left(x^2\right)' = 2x$$

  という解答は **0 点**である。
- 導関数の定義は

  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

  なので，これを計算する必要がある。

  $$\begin{aligned}
  \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
  &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
  &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+h) \\
  &= 2x
  \end{aligned}$$

- 「定義にもとづいて $y = f(x) = \sin x$ の導関数を求めよ。」という問題を考える。
- この問題の場合「次の極限は使用してよい」等の注意書きがあるはずである。三角関数の場合

  $$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

  を使用する。

- 解答は

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

の極限を計算することになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} \\
\frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} \\
&= \frac{-\sin^2 h}{h(\cosh + 1)} = -\frac{\sin h}{h} \frac{\sin h}{\cos h + 1}
\end{aligned}$$

元の式に代入する。

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{\cos h + 1} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= -\sin x \cdot 1 \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x
\end{aligned}$$

- 一方「導関数を求めよ」という問題のときは知っていることはつかってよい。たとえば「$y = f(x) = e^{x^2} \sin\left(x^4 + x^2\right)$ の導関数を求めよ。」という問題を考える。

- この問題の場合「積の微分法」・「合成関数の微分法」の他, $(e^x)' = e^x, (\sin x)' = \cos x$ を使用してよい。

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(e^{x^2}\right)' \sin\left(x^4 + x^2\right) + e^{x^2} \left(\sin\left(x^4 + x^2\right)\right)' \\
&= 2xe^{x^2} \sin\left(x^4 + x^2\right) + (4x^3 + 2x)e^{x^2} \cos\left(x^4 + x^2\right)
\end{aligned}$$