数学序論に対する追加説明 $\sharp 9$

- 昨年の試験問題の解説をする。
- Web に載せてある「解説」はスペースの関係もあり,「解答例」として書いてあるものである。これがよく分からないという人は，基礎事項に対する理解が不足しているので，要綱等を見る必要がある。
- 解答を書いてから計算間違いに気がついた場合は消しゴムでけすのではなく，大きくバツをつけ，間違いに気がついた旨を書くこと。

  解答を書き直す時間があると判断したときは，勿論書き直してよい。

$\boxed{\mathbf{1}}$ 関数 $y = f(x) = \log x$ の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし，極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ は既知としてよい。

- 「定義に基づいて」という点を忘れないように。
- 基礎になる極限は指数関数 e^x に関するものなので，極限を求めるためには対数関数を指数関数に直す必要がある。

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \tag{1}$$

より，$y = \log x, y + k = \log(x+h)$ とおき，指数関数に直す。

$$x = e^y, \quad x + h = e^{y+k}$$

より

$$\log(x+h) - \log x = k, \quad h = e^{y+k} - e^y$$

となる。これを (1) 式に代入する。$h \to 0$ のとき $k \to 0$ なので

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{k}{e^{y+k} - e^y} = \lim_{k\to 0} \frac{k}{e^y(e^k - 1)} \\ &= \frac{1}{e^y} \lim_{k\to 0} \frac{k}{e^k - 1} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $y = f(x) = e^{5x^4} \sin(x^5 + x^3)$ の導関数を求めよ。ただし $(e^x)' = e^x, (\sin x)' = \cos x$ 等の諸公式を用いてよい。

- 積の導関数と合成関数の導関数を適用できればできる問題である。

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left(e^{5x^4}\right)' \sin\left(x^5 + x^3\right) + e^{5x^4}\left(\sin\left(x^5 + x^3\right)\right)' \\
&= 20x^3 e^{5x^4} \sin\left(x^5 + x^3\right) + (5x^4 + 3x^2) e^{5x^4} \cos\left(x^5 + x^3\right)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x)$ の不定積分 $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx$ は $\dfrac{dF}{dx} = f(x)$ をみたす関数として定義される。

$$
\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx
$$

を証明せよ。

- 不定積分は微分の逆として定義された。そのことの理解を問う問題である。定義に従って計算すれば自然に出てくる。

$F(x) = \displaystyle\int f(x)\,dx, G(x) = \int g(x)\,dx$ とおくと

$$
F'(x) = f(x), \quad G'(x) = g(x)
$$

である。

$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$ より

$$
\int f(x) + g(x)\,dx = F(x) + G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx
$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $y = f(x) = 2x^2 - x^4$ に対しグラフの増減表を書き，増減・極点・凹凸・変曲点を調べ，概形を描け。

- 問題で要求しているすべて (増減表，増加・減少，凹凸・変極点，グラフを描く) に対し答えること。事実上計算しているが明示的に書いていない解答も見られた。

- グラフを描く問題では計算間違いを犯すと凹凸，増減などで矛盾が生じる場合がある。そのあたりをきちんと見ていると，計算間違いを犯したとしても，気がつくことができることがある。

導関数および 2 次導関数は

$$f'(x) = 4x - 4x^3 = 4x(1-x^2), \quad f''(x) = 4 - 12x^3$$

である。$f'(x) = 0$ を解いて $x = -1, 0, 1$ を得る。

また $f''(x) = 0$ を解いて $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。値を計算すると

$$f(-1) = 1, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5}{9}, f(0) = 0, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5}{9}, f(1) = 1$$

である。

$f'(x)$ および $f''(x)$ の正負を調べることにより，増減表は次の様になることが分かる。

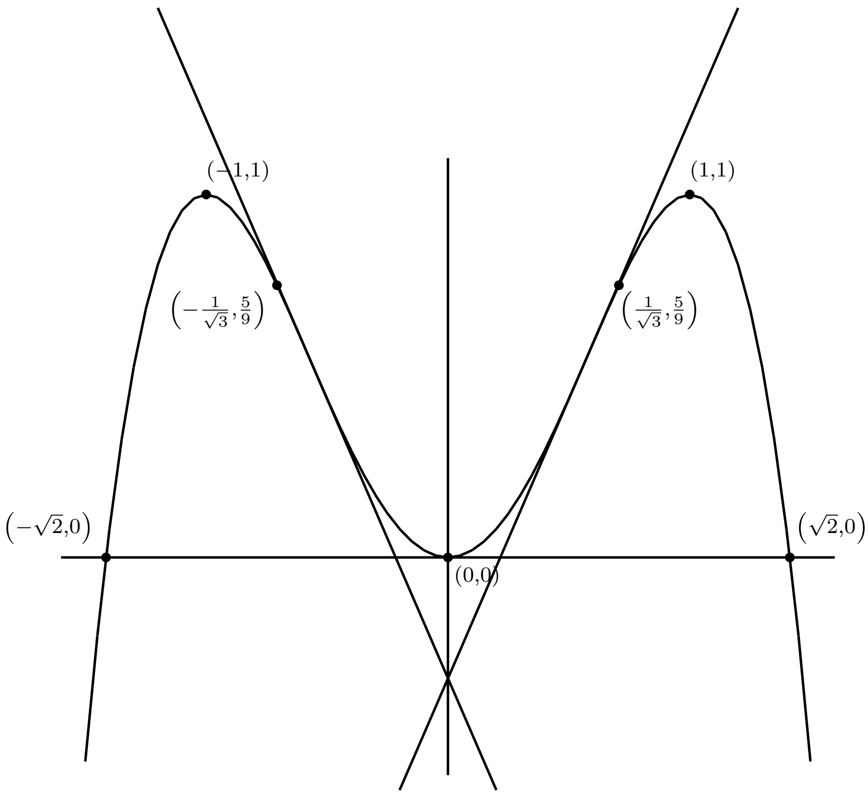
x		-1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{5}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{9}$	$\nearrow$	1	$\searrow$

よって極点は $(-1,1), (0,0), (1,1)$ であり，$(-\infty, -1]$ および $[0,1]$ で増加の状態にあり，$[-1,0]$ および $[1,\infty]$ で減少の状態にある。

変曲点は $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{5}{9}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{5}{9}\right)$ であり，区間 $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ および $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ で上に凸，区間 $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ で下に凸になる。

$f(x) = 0$ の解が $x = 0, \pm\sqrt{2}$ であることに注意するとグラフの概形は下のようになる。

図では変曲点における接線も描いてある。



$\boxed{\mathbf{5}}$ $y=\left(\dfrac{\log x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ に対し $\lim\limits_{x\to\infty} y$ を求めよ。最初に $\lim\limits_{x\to\infty}\log y$ の極限を求めよ。

- ロピタルの定理を使う問題である。log をとって極限を計算して，指数関数の連続性を用いて求める極限を得る。

$$\log y=\log\left(\frac{\log x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\log\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

より

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\log y&=\lim_{x\to\infty}\frac{\log\left(\dfrac{\log x}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\log\left(\dfrac{\log x}{x}\right)\right)'}{x'}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\log x}\frac{1-\log x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-\log x)'}{(x\log x)'}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{x(\log x+1)}=0\end{aligned}$$

となる。ここで $\exp x$ は連続なので $\lim\limits_{x\to\infty}\exp x=\exp\left(\lim\limits_{x\to\infty}x\right)$ に注意すると

$$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\exp\left(\log y\right)=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\log y\right)=\exp 0=1$$

を得る。

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次のようにパラメーター表示された曲線の概形を書け。

$$x = x(t) = t^3 - t, \qquad y = y(t) = 4t^2 - t^4$$

- パラメーター表示された曲線の概形の書き方が分かっていればできる問題である。

$x'(t) = 3t^2 - 1, y'(t) = 8t - 4t^3$ である。$x'(t) = 0$ を解くと $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ が得られ，$y'(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm\sqrt{2}$ が得られる。

$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\sqrt{2}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{2}$	
x'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
y	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$
曲線	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $(x(0), y(0)) = (0, 0)$, $(x(\sqrt{2}), y(\sqrt{2})) = (\sqrt{2}, 4)$，$(x(-\sqrt{2}), y(-\sqrt{2})) = (-\sqrt{2}, 4)$, $\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \dfrac{11}{9}\right)$，$\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \dfrac{11}{9}\right)$ である。$y(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 2$ を得る。$(x(2), y(2)) = (6, 0)$，$(x(-2), y(-2)) = (-6, 0)$ なので x 軸との交点は $(0, 0), (6, 0), (-6, 0)$ である。$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。$(x(1), y(1)) = (0, 3), (x(-1), y(-1)) = (0, 3)$ y 軸との交点は $(0, 0), (0, 3)$ である。

t が小さい方から大きい方へ

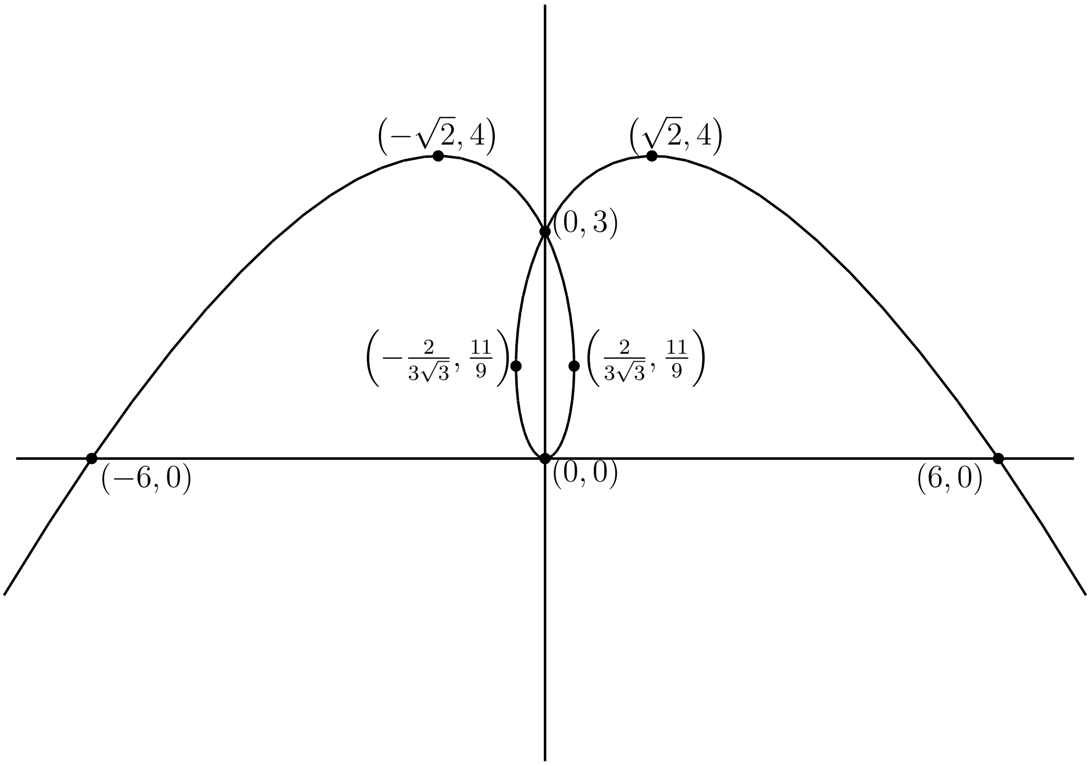
$$-2 \rightarrow -\sqrt{2} \rightarrow -1 \rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow 1 \rightarrow \sqrt{2} \rightarrow 2$$

と動くと点 $(x(t), y(t))$ は

$$(-6,0)\to\left(-\sqrt{2},4\right)\to(0,3)\to\left(\frac{2}{3\sqrt{3}},\frac{11}{9}\right)\to(0,0)\to\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}},\frac{11}{9}\right)$$
$$\to(0,3)\to\left(\sqrt{2},4\right)\to(6,0)$$

と動く。

以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



$\boxed{7}$ 直線 $y = mx + n$ が $y = f(x)$ に異なる 2 点で接しているとき複接線という。$y = f(x) = x^4 - x^2 + x + 1$ の複接線を求めよ。

- $F(x) = f(x) - (mx+n)$ とおく。直線 $y = mx+n$ が $y = f(x)$ のグラフと点 $(a, f(a))$ で接しているとき $F(x)$ は $(x-a)^2$ で割り切れる。
- このことから異なる 2 点 $(a, f(a)), (b, f(b))$ で接している場合 $F(x)$ は $(x-a)^2(x-b)^2$ で割り切れる。

このことに気がつけば問題はそれほど難しくない。

- $y = mx{+}n$ は複接線なので 2 つの異なる接点を $(a, f(a)), (b, f(b))$ とする。$F(x)$ は $(x-a)^2$ および $(x-b)^2$ で割り切れる。このことより $F(x)$ は $(x-a)^2(x-b)^2$ で割り切れる。最高次係数を比較することにより $F(x) = (x-a)^2(x-b)^2$ が分かる。

  $$(x-a)^2(x-b)^2 = x^4 - 2(a+b)x^3 + \left((a+b)^2 + 2ab\right)x^2 - 2ab(a+b)x + a^2b^2$$

  となるが $F(x)$ と係数を比較して $a+b=0, ab = -\dfrac{1}{2}$ が分かる。このとき

  $$m = 1$$
  $$n = 1 - (ab)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

  となり，求める接線は

  $$y = x + \frac{3}{4}$$

$\boxed{\mathbf{8}}$ 不定積分

$$\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx$$

を求めよ。$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$ は既知としてよい。

- 置換積分を理解していればできる問題である。
- 積分の問題はチェックが容易なので必ず行う事。
- 計算間違いに気がついた場合は解答部分に×をつけて気がついた旨書くこと。
- それをしない計算間違いは 0 点です。

  $t = 2x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = 2$ より $dx = \dfrac{1}{2}dt$ である。

  $$\int \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+t^2}\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\arctan t = \frac{1}{2}\arctan 2x$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ 不定積分

$$\int (\log x)^2\,dx$$

を求めよ。**ヒント：**$f' = 1, g = (\log x)^2$ とおき部分積分を実行する。

- 部分積分を理解していればできる問題である。

  $f' = 1$，$g = (\log x)^2$ とおくと $f = x$ なので

$$
\begin{aligned}
\int (\log x)^2\, dx &= fg - \int fg'\, dx = x(\log x)^2 - \int x \cdot 2\log x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= x(\log x)^2 - 2\int \log x\, dx = x(\log x)^2 - 2\int x' \log x\, dx \\
&= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2\int x(\log x)'\, dx \\
&= x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x
\end{aligned}
$$