

1.3 必要条件と十分条件

$$\begin{array}{ccc}
 P & \implies & Q & \text{正しい命題} \\
 \text{十分条件} & & \text{必要条件} &
 \end{array}$$

$P \implies Q$ が正しい命題であるとき Q を P (であるため) の必要条件 (necessary condition) であるという。また P は Q (であるため) の十分条件 (sufficient condition) という。

$P \implies Q$ と $Q \implies P$ が共に正しいとき P は Q の必要条件でもあり十分条件でもある。このとき P は Q の必要十分条件 (sufficient and necessary condition) であるという。このとき Q も P の必要十分条件である。

$P \implies Q$ が真であり、 $Q \implies P$ が偽であるとき、 P は Q の十分条件であるが、必要条件ではない。このとき Q は P の必要条件ではあるが、十分条件ではない。

$P \implies Q$ と $Q \implies P$ が共に正しくないとき P は Q の必要条件でも、十分条件でもない。このとき Q も P の必要条件でも、十分条件でもない。

実際の議論の中では論理を自覚的に意識していないと混乱する場合も多い。必要条件の十分条件は元の命題と何の関係もない。このことは次の図式

$$P \implies Q \iff R$$

を考えると分かる。 P, R を勝手な命題とし、 Q を正しい命題 (例えば「 $1 = 1$ 」) とすると、 $P \implies Q$ も $R \implies Q$ も正しい命題である。 Q は P の必要条件であり、 R は Q の十分条件なので、 R は P の必要条件の十分条件であるが、 P と R の間には何の関係もない。このことは十分条件の必要条件

$$P \iff Q \implies R$$

でも同様である。この場合は Q として偽である命題 (例えば「 $1 \neq 1$ 」) を採用すればよい。

必要条件・十分条件を判定するときに、複雑なものに対して真理値表を使って解くという方法が考えられる。次の問題で考えてみよう。

問題：実数 x, y に対して、「 $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ 」は $(x, y) \neq (0, 0)$ であるための

X を「 $x = 0$ 」、 Y を「 $y = 0$ 」、 Z を「 $(x, y) = (0, 0)$ 」とする。
 P を「 $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ 」とすると、 P は「 $\neg X \wedge \neg Y$ 」と書ける。
 Q を「 $(x, y) \neq (0, 0)$ 」とすると Q は「 $\neg Z$ 」と書ける。ここで

$$\begin{aligned} (x, y) = (0, 0) &\iff (x = 0 \wedge y = 0) && \text{すなわち} \\ Z &\iff X \wedge Y \end{aligned}$$

がポイントとなる。このことに注意して真理値表を書くと次の様になる。

X	Y	$\neg X$	$\neg Y$	$P = \neg X \wedge \neg Y$	Z	$Q = \neg Z$	$P \implies Q$	$Q \implies P$
T	T	F	F	F	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F	T	T	T

真理値表により $P \implies Q$ は成立するが、 $Q \implies P$ は成立しないことが分かる。よって P は Q であるための「十分条件だが必要条件ではない」となる。

演習問題 1.11 次において X は Y の、1) 必要十分条件、2) 必要条件ではあるが十分条件ではない、3) 十分条件ではあるが必要条件ではない、4) 必要条件でも十分条件でもない、のいずれかであるか決定せよ。ここで x, y は実数とする。

- (1) $X : x^2 = 1, Y : x = 1$
- (2) $X : xy > 0, Y : x > 0$ かつ $y > 0$
- (3) $X : xy > 0, Y : x > 0$ または $y > 0$
- (4) $X : xy = 0, Y : x = 0$ かつ $y = 0$
- (5) $X : xy = 0, Y : x = 0$ または $y = 0$
- (6) $X : x = 1$ でないかまたは $y = 1, Y : xy = 1$
- (7) $X : x = 0$ でなく、かつ $y = 0$ でない、 $Y : xy = 0$ でない
- (8) $X : xy = 0$ かつ $y = x + 1, Y : x = 0$ かつ $y = 1$
- (9) $X : x^2 + 2x - 1 = 0$ かつ $x > 0, Y : x = -1 + \sqrt{2}$

ここで論理の実際的練習として高次連立方程式を解くことを考える。高次連立方程式は2変数関数の極値問題⁽¹⁾を考えるとときに必要になる。演習問題も極値問題から採用した。よって以下解はすべて実数の範囲で考えるものとする。次の連立方程式

$$\begin{cases} y(1 - 2x^2 - y^2) = 0 \\ x(1 - x^2 - 3y^2) = 0 \end{cases}$$

を解くことを考える。 $\alpha \times \beta = 0$ が成立するためには $\alpha = 0$ ま

⁽¹⁾後期に解析学 I で扱う。

たは $\beta = 0$ が成立していればよい。すでに学んだ用語を用いると $\alpha \times \beta = 0$ である必要十分条件は $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ である。すなわち

$$\begin{aligned} y(1 - 2x^2 - y^2) = 0 &\iff y = 0 \vee 1 - 2x^2 - y^2 = 0 \\ x(1 - x^2 - 3y^2) = 0 &\iff x = 0 \vee 1 - x^2 - 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

となっている。

$y = 0$ という命題を Y , $1 - 2x^2 - y^2 = 0$ という命題を A , $x = 0$ という命題を X , $1 - x^2 - 3y^2 = 0$ という命題を B とすると

$$\begin{aligned} (Y \vee A) \wedge (X \vee B) &\equiv ((Y \vee A) \wedge X) \vee ((Y \vee A) \wedge B) \\ &\equiv (Y \wedge X) \vee (A \wedge X) \vee (Y \wedge B) \vee (A \wedge B) \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} y(1 - 2x^2 - y^2) = 0 \wedge x(1 - x^2 - 3y^2) = 0 &\iff \\ (y = 0 \wedge x = 0) \vee (1 - 2x^2 - y^2 = 0 \wedge x = 0) \vee \\ (y = 0 \wedge 1 - x^2 - 3y^2 = 0) \vee (1 - 2x^2 - y^2 = 0 \wedge 1 - x^2 - 3y^2 = 0) & \end{aligned}$$

となり $Y \wedge X$, $A \wedge X$, $Y \wedge B$, $A \wedge B$ の4つの場合を考えればよいことがわかる。

最初は $Y \wedge X$ の場合を考える。このとき解として $x = 0$ かつ $y = 0$, すなわち $(x, y) = (0, 0)$ を得る。

次に $A \wedge X$ の場合を考える。このとき A は $1 - 2x^2 - y^2 = 0$ を X は $x = 0$ を意味する。 $x = 0$ を $1 - 2x^2 - y^2 = 0$ に代入すると, $y^2 = 1$ となる。よって $y = 1$ または $y = -1$ であり, このときの解は $(x, y) = (0, 1)$ または $(x, y) = (0, -1)$ である。これを $(x, y) = (0, \pm 1)$ と書くこともある。

次に $Y \wedge B$ の場合を考える。このとき $y = 0$ かつ $1 - x^2 - 3y^2 = 0$ が成立している。 $y = 0$ を $1 - x^2 - 3y^2 = 0$ に代入すると, $x^2 = 1$ となる。よって $x = 1$ または $x = -1$ であり, このときの解は $(x, y) = (\pm 1, 0)$ となる。

最後に $A \wedge B$ の場合を考える。 $1 - 2x^2 - y^2 = 0$ かつ $1 - x^2 - 3y^2 = 0$ が成立している。 A から B を引くと $-x^2 + 2y^2 = 0$ を得る。これを B に代入すると, $1 - 5y^2 = 0$ となり, $y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ または $y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ を得る。この解をそれぞれ B に代入すると $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ を得る。よつ

て $(x, y) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ (複号同順でない) となる。以上により

連立方程式の解は

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

である。

ここで改めて確認しておくが、 (x, y) が連立方程式

$$y(1 - 2x^2 - y^2) = 0, \quad x(1 - x^2 - 3y^2) = 0$$

を満たすことの必要十分条件は

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, 0), \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

である⁽²⁾。

連立方程式を解くということは、このような形の必要十分条件を求めることを意味する。解の一部を求めたのでは必要十分条件にはならず、すべての解を求めて初めて必要十分条件が得られることは強調しておきたい。

演習問題 1.12 次の連立方程式の解を実数の範囲で求めよ。

ヒント：式を $XY = 0$ と因数分解できれば条件が低い次数の式になるので解きやすい。1つの式で因数分解できる式がでないときは2つの式を組み合わせてつくるのも1つの方法である。

- (1) $x(x^2 + y^2) = 0$ かつ $y(x^2 + y^2 - 1) = 0$
- (2) $6x^2 + y^2 + 10x = 0$ かつ $xy + y = 0$
- (3) $3x^2 + 2y^2 - 6x = 0$ かつ $2xy + y = 0$
- (4) $x + y + 2x^3 = 0$ かつ $x + y + 2y^3 = 0$
- (5) $x^2 - y = 0$ かつ $y^2 - x = 0$
- (6) $x(x^2 + 3y^2 - 1) = 0$ かつ $y(3x^2 + y^2 - 1) = 0$
- (7) $x^3 - x + y = 0$ かつ $y^3 + x - y = 0$
- (8) $(y - 2x^2y)2^{-x^2-y^2} = 0$ かつ $(x - 2xy^2)2^{-x^2-y^2} = 0$
- (9) $\sin x (\cos y \sin(x + y) + \sin y \cos(x + y)) = 0$ かつ
 $\sin y (\cos x \sin(x + y) + \sin x \cos(x + y)) = 0$

⁽²⁾ここではチェックなしに「必要十分条件である」と述べたが、これは計算間違いをしていないことを前提にしている。実際の計算の場合、求めた解を最初の連立方程式に代入して成立することをチェックすることを強く推奨する。求めた解が元の方程式を満たさないときは、どこかで間違いをおかしたことを意味するし、満たしていれば、少なくとも「求めた解は正しい」ことが分かる。