数学序論要綱 ♯5

2　集合と写像

現代数学[1]では「数学的対象」はすべて集合と考える。集合は種々の数学的対象から諸特徴を取り除いていったときに残る共通部分のようなものである。簡単な概念に見えるが，逆説的にいうと，簡単だから難しいともいえる。

次は「数学辞典」(岩波書店) に書いてある集合の (素朴な) 定義である。

> 直観または思考の対象のうちで一定範囲にあるものを 1 つの全体として考えたとき，それを (それらの対象の) **集合** (*set*) といい，その範囲内の個々の対象をその集合の**元** (*element*) または**要素** という。

なんとも歯切れの悪い表現になっており，これでは集合というものが何なのか良くわからない。

「数学入門辞典」(岩波書店) には次のように書かれている。

> 集合とは，はっきりと区別できる「もの」の集まりである。集合 A を構成する「もの」を元または要素という。

しかし,「もの」というものが明確でないのでやはりよく分からない。

集合の定義を厳密にしようと試みると種々の難しい問題が発生することが知られている。ここでは集合を数学的対象の集まりで，その集合に属しているかいないかが**確定しているもの**と考えることにする。たとえば「10 以下の自然数」の集合はその集合に属しているものは確定している。「背の高い人」というと「背が高い」かどうかが確定しているわけではないので,「背の高い人の集合」は集合とはいえない。

集合の本当の定義というのは当然あるのだが，それを厳密に書くと，もっとわけがわからなくなるので，ここではとにかく，範囲の「確定」している何かを集めたらそれは集合だ，と思っていてもらえればよい。

[1]「現代数学」という言葉は一般的な現代の数学という意味ではない。20 世紀初頭数学の「変革」が行われそれ以降の数学という意味合いで使われる。時代は 21 世紀に入ったので別の用語で呼ばれるべきかもしれないが，今のところそう呼ばれているので，ここでもこの語を使用する。

2.1 集合の表し方

集合の表し方として 2 通りの方法がある。まず第 1 の方法は，その元を全て列挙するというものである。たとえば「10 以下の自然数」の集合 A は

$$A = \{\, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \,\}$$

と表す。これを**外延的表現**と呼ぶ。一般に，元が有限個であれば，集合を表すとき，それをすべて並べて括弧 (波括弧 [1]) でくくって表す。集合はものの集まりであるから元を並べる順序は自由である。

$$\{\, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 1, 8, 4, 6 \,\}$$

と表されている集合も A である。(通常は大小の順等分かりやすい表現を選ぶ。)

自然数全体の集合のように，無限個の元を含んでいるような集合の場合，全ての元を列挙するのは不可能なので，

$$\mathbb{N} = \{\, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots \,\}$$

などと，ちょっとごまかして書いたりする [2]。この $\mathbb{N}$ という記号は，自然数全体の集合を表すものとして，数学において，標準的に使われているものである。数の集合を表す他の標準的な記号としては (すでに出てきているが),

- 整数全体の集合 $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$
- 実数全体の集合 $\mathbb{R}$
- 複素数全体の集合 $\mathbb{C}$

などがある。

演習問題 2.1　次の集合を外延的表現で表せ。

(1) 6 以下の自然数の集合

(2) 15 以下の偶数である自然数の集合

(3) -1 以上 3 以下の整数の集合

(4) 3 で割り切れる 15 以下の自然数の集合

(5) 3 で割ると余りが 1 である 15 以下の自然数の集合

(6) 30 以下の素数の集合

---

[1] ブレース (brace)。中括弧と呼ばれることもあるが,「中括弧」と「大括弧」が逆の国も多い。

[2] 一般に「$\cdots$」という記号が用いられているときは,「ちょっとごまかし」があると考えてよい。数学では「$\cdots$」を用いずに書くことは必ずできる。だが実際にそのことを遂行するのに理論的負荷がかかる場合もある。この講義ではその意味が明確な場合は「$\cdots$」を使用する。

集合を表す第 2 の方法は，その集合の元が満たすべき条件を指定する，というものである。

すなわち，$P(x)$ を命題関数とし，$P(x)$ が 真 となるような x 全体の集合を

$$\{x \mid P(x)\}$$

で表す。これを**内包的表現**と呼ぶ。有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

と表すことができる。ただし集合を現す記号の中でカンマは**「かつ」の意味にとる**ものと約束する。

A を集合とする。a が A の元である，ということを，

$$\boxed{a \in A \text{ または } A \ni a}$$

という記号で表す。a は A の元ではないということを

$$a \notin A \text{ または } A \not\ni a$$

という記号で表す。「元である」という意味の「$\in$」が集合においては**最も基本的な概念**である。

A を「10 以下の自然数」の集合とすると

$$1 \in A, \quad A \ni 3$$

であり，

$$\pi \notin A, \quad A \not\ni 17$$

である。

元を 1 つも含まないものも集合として扱う。これを $\emptyset$ または $\{\ \}$ という記号で表し**空集合** (*empty set*) という。

集合 A の元 x で $P(x)$ が真であるもの全体の集合，すなわち $\{x \mid x \in A \land P(x)\}$ はよく出てくるので，これを

$$\boxed{\{x \in A \mid P(x)\}}$$

で表す。

「10 以下の自然数」の集合 A は自然数の中で 10 以下という性質をもつ元の集まりなので

$$A = \{a \in \mathbb{N} \mid a \leq 10\}$$

という書き方ができる。$\mathbb{Z}$ を整数全体のつくる集合とするとき，

$$A = \{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq a,\ a \leq 10\}$$

とも書ける。

例 2.1

(1) 自然数のなかの偶数全体の集合は $\{2,4,6,8,\cdots\}$ と書いても大体意味は通じる。しかし厳密に言うと，これでは 8 の後にどのような数が来るのかはわからない。

定義に従って，$\{n \in \mathbb{N} \mid n$ は偶数$\}$ と書いた方が正確ではある。「偶数」という概念が既知でない場合は

$$\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N} \;\; n = 2k\}$$

と書いてもよい。しかし，ちょっと変則的ではあるが，

$$\{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

と書いた方が，集合を用いて何か議論するときに有用であり，このような表現の方がよく使われる。

要は，縦棒の左側にその集合の要素を書き，右側にその要素が満たすべき条件を書く，ということである。この場合 k の代わりに j を用いて $\{2j \mid j \in \mathbb{N}\}$ としても同じ集合を表す。すなわち $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{2j \mid j \in \mathbb{N}\}$ である。

(2) 4 で割ると余りが 3 である自然数全体の集合を同じ様に表そう。集合は $\{3,7,11,15,\cdots\}$ となっている。4 で割って 3 余る自然数を n とすると，ある整数 k が存在して，

$$n = 4k + 3$$

となっている。よって $\{n \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \quad n = 4k+3\}$ と表すことができるが，前述の形にはなっていない。$\{4k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ では負の数が含まれているし，$\{4k+3 \mid k \in \mathbb{N}\}$ では 3 が含まれない。そこで k を $k-1$ に変えた表現を考える。$4(k-1)+3 = 4k-1$ なので

$$\{4k-1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

が求めるものである。

この表し方では余りが 3 であることがすぐには分かりにくいので，

$$\{4k+3 \mid k \in \mathbb{N} \text{ または } k = 0\}$$

という表し方もあるし，

$$\{4k+3 \mid k \in \mathbb{Z}, k \geq 0\}$$

という表し方もある。目的に応じて集合の表し方を選ぶとよい。

演習問題 2.2　次の集合を表せ。ただし例 2.1 (1) の形で表示せよ。
(1) 5 の倍数となるような自然数全体の集合
(2) 3 で割ると余りが 2 となるような自然数 全体の集合
(3) 5 で割ると余りが 3 となるような自然数 全体の集合
(4) 3 で割ると余りが 2 であり，5 で割ると余りが 3 となるような自然数全体の集合
(ヒント：この集合の元は 15 で割ると余りがある数である。)
(5) 7 で割ると余りが 3 であり，3 で割ると余りが 1 となるような自然数全体の集合
(6) 6 で割ると余りが 5 であり，15 で割ると余りが 2 となるような自然数全体の集合

2.2　集合の包含関係と同等性

定義 2.2
(1)　2 つの集合 A，B に対し，集合 B の任意の元が集合 A の元であるとき，すなわち

$$\forall b \quad b \in B \implies b \in A$$

が成立するとき

$$B \subseteq A, \qquad \text{または} \quad A \supseteq B$$

と書いて，B は A の**部分集合** (*subset*) であるという。「B は A に含まれる」という言い方もする。
(2)　$B \subseteq A$ かつ $A \subseteq B$ が成り立つとき，2 つの集合は等しいと定義し，$A = B$ と書く。
(3)　$B \subseteq A$ かつ $A \neq B$ のとき B は A の**真部分集合** (*proper subset*) であるといい，

$$B \subsetneq A, \qquad \text{または} \quad A \supsetneq B$$

などと書く。$B \subseteq A$ と書いたときは，B が A の真部分集合かもしれないし，$B = A$ かもしれない。

注意 2.3 (1)　a が集合 A の元であるという記号 $a \in A$ と，集合 B が集合 A の部分集合であるという記号 $B \subseteq A$ はどちらも「含まれる」という表現をすることがあるので，**混同しない**こと。一方は集合と元の関係，他方は集合と集合の関係であることを意識すること。
(2)　集合間の関係で基本的なのは「 $=$ 」ではなく「 $\subseteq$ 」である。集合に対し $A = B$ を示すためには $A \subseteq B$ かつ $A \supseteq B$ の 2 つを示す必要がある。
(3)　部分集合と真部分集合の記号はいくつかの流儀が混在しているので注意が必要である。集合に関する本を見ると次の表の A およ

び B が多い。記号は記号にすぎないので，何が使われているかを意識して使用すれば混乱することはない。そうはいっても，同じ記号が別の意味に使われるのは混乱を生むこともあるので，この講義では C の記号を使用する。

	A	B	C
部分集合	$\subseteq$	$\subset$	$\subseteq$
真部分集合	$\subset$	$\subsetneq$	$\subsetneq$

例 2.4
(1) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
(2) $\{\, 4k \mid k \in \mathbb{N} \,\} \subseteq \{\, 2k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$

演習問題 2.3　次の集合 A に対しその部分集合をすべて列挙せよ。
(1) $A = \{\, 1, 2 \,\}$　(2) $A = \{\, 1, 2, 3 \,\}$
(3) $A = \{\, 1, 2, 3, 4 \,\}$

演習問題 2.4
(1) 例 2.4 の (2) を証明せよ。
(2) $\mathbb{N} \supseteq \mathbb{Z}$ ではないことを定義に基づいて示せ。。
(3) $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$ ではないことを定義に基づいて示せ。
(4) $\{\, 4k \mid k \in \mathbb{N} \,\} \supseteq \{\, 2k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ ではないことを定義に基づいて示せ。
(5) $\{\, 4k \mid k \in \mathbb{N} \,\} = \{\, 2k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ ではないことを定義に基づいて示せ。

2.3　集合演算

定義 2.5　A, B を集合とする。

$$A \cup B = \{\, x \mid x \in A \ \vee \ x \in B \,\}$$

を A と B の **和集合** (union) という。

$$A \cap B = \{\, x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B \,\}$$

を A と B の **共通部分** (*intersection*) という。集合の記号内ではカンマ「 , 」を「かつ」の意味にとるという約束の元では (**そしてそのように約束した。**) $\{\, x \mid x \in A \,, x \in B \,\}$ と書いてもよい。

$$A \cap B = \emptyset$$

のとき A と B は**互いに素** (*disjoint*) であるという。

演習問題 2.5　次の A, B, C に関し $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $A \cap C$, $A \cup C$,$(A \cap B) \cap C$,$(A \cup B) \cup C$ を求めよ。また $A \cap (B \cup C)$,$(A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C)$,$(A \cup B) \cap (A \cup C)$ を求めよ。
(1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$,$B = \{1, 3, 5, 6\}$,$C = \{1, 2, 6, 7\}$
(2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,$B = \{1, 2, 3\}$,$C = \{5, 6, 7\}$
(3) $A = \{1, 2, 3, 4\}$,$B = \{1, 3, 5\}$,$C = \{\ \}$

演習問題 2.6　A, B, C を集合とする。次を示せ。
(1) $A \subseteq B$ かつ $B \subseteq C$ ならば $A \subseteq C$
(2) $A \subseteq C$ かつ $B \subseteq C$ ならば $A \cup B \subseteq C$
(3) $A \subseteq B$ かつ $A \subseteq C$ ならば $A \subseteq B \cap C$
(4) $A \subseteq C$ または $B \subseteq C$ ならば $A \cap B \subseteq C$
(5) $A \subseteq B$ または $A \subseteq C$ ならば $A \subseteq B \cup C$
(6) $A \subseteq B$ ならば $A \cup C \subseteq B \cup C$
(7) $A \subseteq B$ ならば $A \cap C \subseteq B \cap C$

演習問題 2.7　A, B, C を集合とする。次を示せ。
(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(これを集合の分配法則と呼ぶ。)

ヒント： これらは，２つの集合が等しい，ということを示す問題である。２つの集合 X, Y が $X = Y$ である，ということの定義は,「 $X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq X$ 」 ということだったので，$X = Y$ を示せ，ということは,「 $X \subseteq Y$ かつ $Y \subseteq X$ 」 を示せ，ということである。

$X \subseteq Y$ の定義は,「 X の全ての元が Y に含まれる 」 ということだったので，上の問題 (1) について言うならば,

$x \in A \cap (B \cup C)$ ならば $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ であることを示し，$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ならば $x \in A \cap (B \cup C)$ であることを示せば良い，ということになる。

定義 2.6
(1) A および B を集合とするとき

$$A - B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$

と定義し，A と B の**差集合** (*difference set*) という。

(2) ある集合 X があって，全ての議論が X の中で行われる，ということを前提としているとき，X を **全体集合** (*total set*) または**普遍集合** (*universal set*) という。

X が全体集合のとき，部分集合 $A \subseteq X$ に対して，$X - A$ を A^c と書き A の **補集合** (*complement*) という。$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$ である。

A^c の「結合度」は $[\,\cap,\cup\,]$ の結合度より大きいものとする。すなわち $A\cup B^c$ は $A\cup(B^c)$ であり，$(A\cup B)^c$ とは解釈しない。

(3) 対象 a, b の**順序対** (orderd pair) を (a,b) で表す。$a=c$ かつ $b=d$ のとき $(a,b)=(c,d)$ である。集合 A, B に対して，$a\in A$, $b\in B$ の順序対 (a,b) の全体からなる集合を $A\times B$ で表して，集合 A, B の **直積集合** (direct product) という。

(4) 同様に，$A_1,A_2,\cdots,A_n$ を集合とした時，

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{\,(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i\quad(1\le i\le n)\}$$

を $A_1,A_2,\cdots,A_n$ の積集合という。

$\mathbb{R}$ は実数全体の集合，$\mathbb{C}$ は複素数全体の集合であった。n 個の $\mathbb{R}$ の積集合 $\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\text{ 個}}$ を $\mathbb{R}^n$, n 個の $\mathbb{C}$ の積集合 $\underbrace{\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{n\text{ 個}}$ を $\mathbb{C}^n$ と書く。

$\mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ なので，2 つの実数 x, y のペア (x,y) というもの全体の集まりである。(x,y) は平面上の点と見なすことができるので，$\mathbb{R}^2$ は平面上の点全体の集合と見なすことができ，2 次元平面と同一視することができる。同様に，$\mathbb{R}^3$ は 3 次元空間と見なすことができる。

演習問題 2.8　演習問題 2.5 の集合 A,B に対し $A-B$, A^c, $A\times B$ を求めよ。ただしここで全体集合は $X=\{\,1,2,\ldots,7\}$ とする。

演習問題 2.9　X を全体集合とし A と B をその部分集合とするとき，次を証明せよ。

(1) $B\subseteq A\iff B^c\supseteq A^c$

(2) De Morgan の法則

$$\begin{aligned}(A\cup B)^c&=A^c\cap B^c\\(A\cap B)^c&=A^c\cup B^c\end{aligned}$$