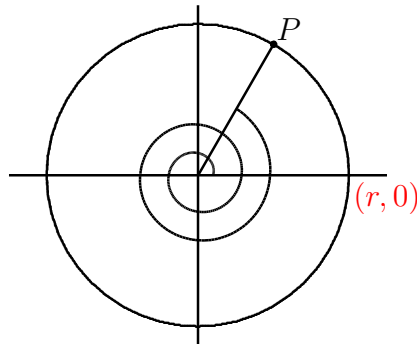


4 いろいろな関数

この章では高校で学んだいろいろな関数の性質を確認するとともに、新しい関数である逆三角関数を学ぶ。

4.1 三角関数

原点 O を中心とする半径 r の円周上に、点 P をとり、線分 OP を考える。点 P がこの円周上を動く時、この線分が原点を中心として回転することになる。この時、この線分 OP を 動径 という。 $P = (r, 0)$ すなわち、動径が右側で水平な状態から回転して行く時、その動いた角度を OP の 一般角 という。反時計回りを 正の向きと決める。時計回りに動く時は、角度は負であるとする。

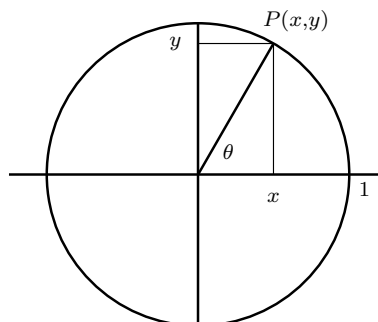


2つの線分が作る角度は 0 から 2π までの値しかとらないが、一般角は全ての実数値をとる。

半径 1 の円周上において OP を動径とし、それが定める一般角を θ とする。 P の座標が (x, y) である時、

$$\cos \theta = x \quad \sin \theta = y$$

と決める。



また, $x \neq 0$ の時,

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

と決める。従って $\tan \theta$ は, 円周上において $x = 0$ となる角度, すなわち, 任意の整数 n に対して

$$\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

では定義されない。

$\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$ ならば, すなわち $\cos \theta \neq 0$ ならば,

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

である。

P は半径 1 の円周上の点なので, 任意の θ に対して,

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

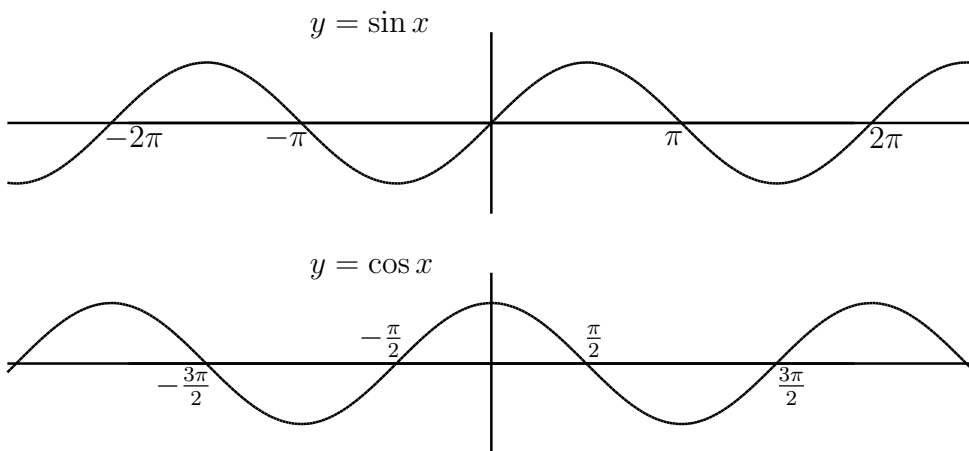
が成り立つ。

- θ を改めて x と書くと, $\sin x, \cos x$ は, 全ての实数 x に対して定義された関数である。また $\tan x$ は,

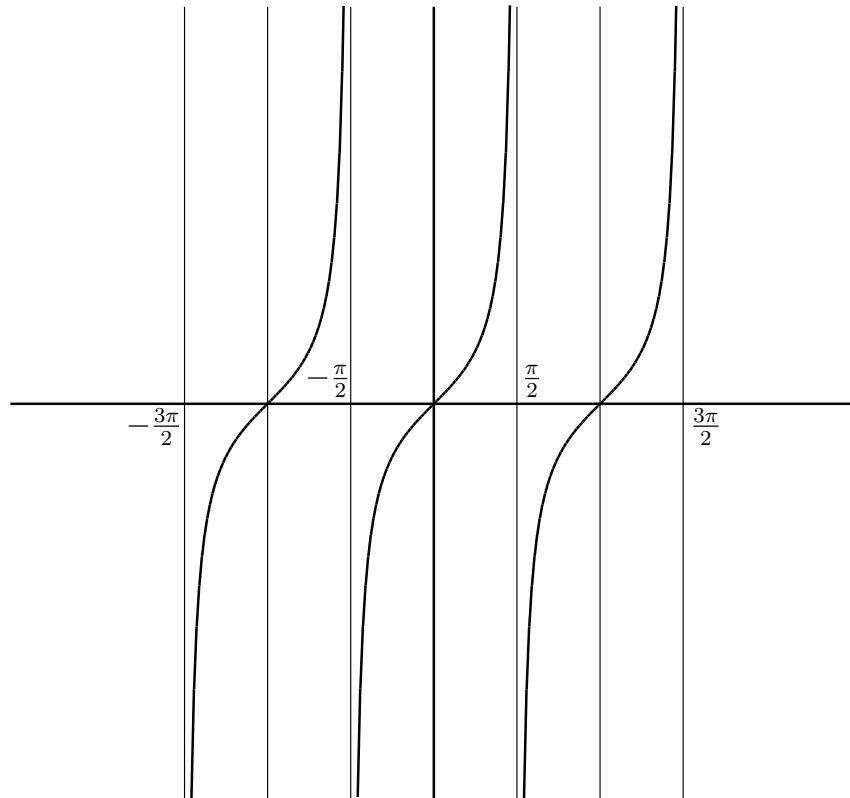
$$\mathbb{R} - \left\{ x \mid x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

という集合上で定義された関数である。

- $\sin x$ を 正弦関数, $\cos x$ を 余弦関数, $\tan x$ を 正接関数 という。これらを 三角関数 という。



$$y = \tan x$$



- また，これらの逆数を与える関数を

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

と書き，それぞれ コセカント，セカント，コタンジェント と読む⁽¹⁾。cosec x は csc x と書くこともある。

- 定義から，任意の整数 n に対して，

$$\sin x = \sin(x+2n\pi), \quad \cos x = \cos(x+2n\pi), \quad \tan x = \tan(x+n\pi)$$

が成り立つ。

- 一般に，関数 $f(x)$ に対して，ある正の実数 p が存在して， f の定義域上の任意の x に対して $f(x) = f(x+p)$ が成り立つ時， f は周期 p の周期関数であるという。この用語を用いると， $\sin x$, $\cos x$ は，周期 2π の周期関数であり， $\tan x$ は周期 π の周期関数である。

- 定義から，任意の実数 x に対して

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

が成り立つ。従って $\tan(-x) = -\tan x$ である。

⁽¹⁾昔はサイン，コサイン，タンジェントと同等に用いられていたが，最近はあまり用いられない。高校の教科書からも消えてしまった。

- 一般に，任意の実数 x に対して $f(-x) = -f(x)$ となる関数を奇関数， $f(-x) = f(x)$ となる関数を偶関数という。 $\cos x$ は偶関数であり， $\sin x, \tan x$ は奇関数である。

$f(x)$ が偶関数ならば，グラフ上の点 $(x, f(x))$ に対し， $(-x, f(-x)) = (-x, f(x))$ もグラフ上の点となる。すなわち， $f(x)$ のグラフは y -軸に関して対称である。

$f(x)$ が奇関数ならば，グラフ上の点 $(x, f(x))$ に対し， $(-x, f(-x)) = (-x, -f(x))$ もグラフ上の点となる。すなわち， $f(x)$ のグラフは原点に関して点対称である。

演習問題 4.1 次を証明せよ。

- (1) $f(x), g(x)$ が偶関数のとき $f(x)g(x)$ は偶関数である。
- (2) $f(x), g(x)$ が奇関数のとき $f(x)g(x)$ は偶関数である。
- (3) $f(x)$ が偶関数， $g(x)$ が奇関数のとき $f(x)g(x)$ は奇関数である。

定理 4.1 [余弦定理] 三角形 OAB において， $\theta = \angle AOB$ とすると，

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \theta$$

が成り立つ。

演習問題 4.2 定理 4.1 を証明せよ。

定理 4.2 [正弦定理] 三角形 ABC において，各頂点 A, B, C の角度を同じ A, B, C で表し，それらの向かい側の辺の長さをそれぞれ a, b, c で表す。また，この三角形の外接円の半径を r とする。このとき次が成り立つ。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

演習問題 4.3 定理 4.2 を証明せよ。

\sin, \cos の加法定理とは，次の様な公式である。

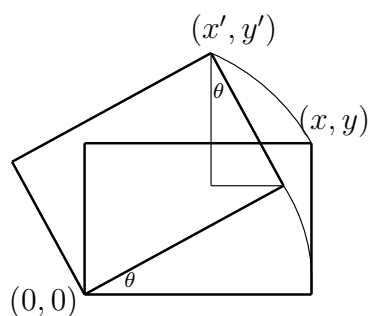
$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

この式が成立するのは下図を見ると分かる。 (x, y) という点を原点を中心として角度 θ だけ回転させることにより (x', y') になったとする。このとき

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta \quad (1)$$

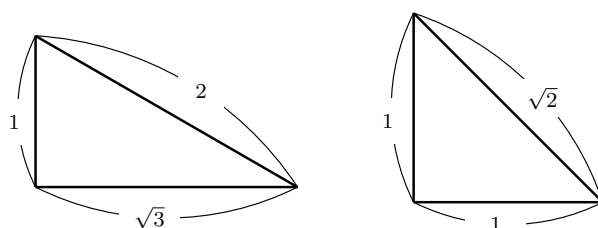
$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta \quad (2)$$

となることが分かる。



演習問題 4.4 上式 (1),(2) を証明せよ。

特に, (x, y) が単位円上にあり, $x = \cos \alpha, y = \sin \alpha$ であって, 回転の角が $\beta = \theta$ のとき加法定理が得られる。



上図のような三角定規型の三角形の辺の長さの比を知っていれば, $\frac{n}{6}\pi, \frac{n}{4}\pi, \frac{n}{3}\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) での三角関数の値が分かる。三角関数の定義で使用した半径 1 の円中に縮小した三角形を考えればよい。

加法定理から三角関数の色々な関係式が導かれる。これを最後の演習問題にする。加法定理を用いて高校時代導いた様にもできるが, オイラーの公式と指数法則を用いても証明できる。

例えば $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ はオイラーの公式と指数法則を用いると次の様に (一度に) 証明できる。 $e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ に注意する。

$$\begin{aligned} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \exp i\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \exp ix \exp i\frac{\pi}{2} \\ &= \exp(ix) i = (\cos x + i \sin x) i \\ &= -\sin x + i \cos x \end{aligned}$$

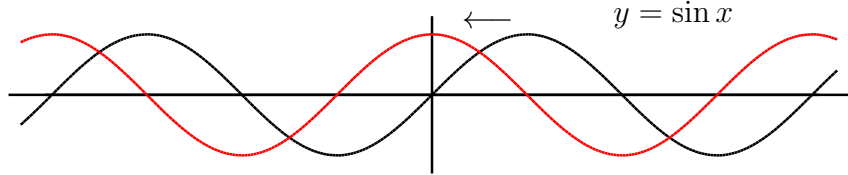
両辺を比較して与式が得られる。

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ 等の式ではグラフで理解しておく, 直感的に理解できる。

$y = f(x)$ のグラフを x の正の方向に a , y の正の方向に b 動かしたグラフを表す関数は

$$y - b = f(x - a)$$

であった。 $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ なので $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフは $y = \sin x$ のグラフを x の正の方向に $-\frac{\pi}{2}$ (すなわち x の負の方向に $\frac{\pi}{2}$) 移動したもののなので下図のように $y = \cos x$ のグラフになっている。



演習問題 4.5 加法定理または指数法則を用いて以下の公式を示せ⁽²⁾。

(1)

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x, & \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos x \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x, & \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin x \end{aligned}$$

(2)

$$\sin(x \pm \pi) = -\sin x, \quad \cos(x \pm \pi) = -\cos x$$

(3) $\tan x$ の加法定理 :

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

(4) 倍角の公式 :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

(5) 3倍角の公式 :

$$\sin 3x = -4 \sin^3 x + 3 \sin x, \quad \cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

(6) 半角の公式 :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

⁽²⁾この問題にある公式を丸暗記している人がいるが、正確に丸暗記しているならまだしも、不正確に暗記して必要なときに間違えるということが多々ある。これらの式を自分で導くことにより、三角関数の諸性質に精通した方が丸暗記よりも有効であると思われる。

(7) 和積公式：

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

(8) 積和公式：

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \left\{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \right\}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left\{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \right\}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \left\{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \right\}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left\{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \right\}$$