数学序論問題解説 $\sharp 2$

演習問題 1.7　次の命題の否定命題をつくれ。また元の命題の真偽を判定せよ。ここで $\mathbb{R}$ は実数全体からなる集合とする。

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \ \ x^2+3x+2 \geq 0$

(2) $\forall x \in \mathbb{R} \ \ x^4+3x^2+2 \geq 0$

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \ \ x^4-x^2+\dfrac{1}{4} \geq 0$

(4) $\forall x \in \mathbb{R} \ \ x^4-x^2+\dfrac{1}{5} \geq 0$

(5) $\exists x \in \mathbb{R} \ \ x^4-x^2+\dfrac{1}{5} \leq 0$

(6) $\exists x \in \mathbb{R} \ \ \left(x-2x^2>0 \ \wedge \ x<0\right)$

(1)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \ \ x^2+3x+2<0$ 」である。

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

なので $x=-\dfrac{3}{2}$ を代入したものは負になる。よって否定命題は正しく，元の命題は偽である。

(2)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \ \ x^4+3x^2+2<0$ 」である。

$$x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2)$$

である。任意の実数 x に対し $x^2 \geq 0$ なので x^2+1, x^2+2 ともに正であり，$(x^2+1)(x^2+2)$ は正である。よって元の命題は真である。

(3)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \ \ x^4-x^2+\dfrac{1}{4}<0$ 」である。$x^4-x^2+\dfrac{1}{4}=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ なので 1.7 (3) は正しい命題である。

(4)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{R} \ \ x^4-x^2+\dfrac{1}{5}<0$ 」である。$x^4-x^2+\dfrac{1}{5}=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}=\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{20}$ が成立する。$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とすると，$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^4-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{1}{20}<0$ となるので否定命題は正しい命題である。よって 1.7 (4) は偽である。

(5)　否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \ \ x^4-x^2+\dfrac{1}{5}>0$ 」である。(4) の (反) 例は (5) の例にもなっているので，1.7 (5) は正しい。

(6)　否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{R} \ \ \left(x-2x^2 \leq 0 \ \vee \ x \geqq 0\right)$」である。$x-2x^2=x(1-2x)>0 \iff 0<x<\dfrac{1}{2}$ なので $x-2x^2>0$ かつ $x<0$ となる実数 x は存在しない。よって 1.7 (6) は偽である。

演習問題 1.8　a, b は与えられた実数とする。次の命題の否定命題をつくれ。またこの命題の意味を考えることにより，a と b がどのような関係にあるとき真になるか考察せよ。

(1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad a<x \implies b<x$

(2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad a>x \implies b>x$

(3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad a \leq x \implies b<x$

(1)　命題「$\forall x \in \mathbb{R} \ \ a<x \implies b<x$」を P とする。否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \ a<x \wedge x \leq b$$

である。

否定命題 $\neg P$ が正しいとき $a < b$ が成立する。「 $a < b$ 」という命題を P_1 とおくと

$$\neg P \implies P_1$$

が成立している。

この逆

$$P_1 \implies \neg P$$

が成立する。なぜなら，P_1 が真のとき $x = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと x は $a < x \leq b$ を満たす。よって $\neg P$ が成立し，$P_1 \implies \neg P$ は真である。

よって $\neg P$ と P_1 は同値であることが分かる。即ち

$$P_1 \quad \equiv \quad \neg P$$

が成立する。同値な命題の否定命題は同値なので

$$\neg P_1 \quad \equiv \quad P$$

が成立する。以上によりもとの命題 P は P_1 ($a < b$) の否定，即ち「 $a \geq b$ 」と同値であることが分かる。

(1) は $a \geq b$ のとき真，$a < b$ のとき偽である。

(2)　命題「$\forall x \in \mathbb{R}\ a > x \implies b > x$」を P とする。否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R}\ a > x \wedge x \geq b$$

である。

「$a > b$」という命題を P_1 とおくと

$$\neg P \implies P_1$$

が成立している。

この逆

$$P_1 \implies \neg P$$

が成立する。なぜなら P_1 が正しいとき $x = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと x は $a > x \geq b$ をみたす。よって $\neg P$ が成立し，$P_1 \implies \neg P$ は真である。

同値な命題の否定命題は同値なので

$$\neg P_1 \quad \equiv \quad P$$

が成立する。以上によりもとの命題 P は P_1 ($a > b$) の否定，即ち「 $b \geq a$ 」と同値であることが分かる。

(2) は $b \geq a$ のとき真，$a > b$ のとき偽である。

(3)　命題「$\forall x \in \mathbb{R}\ \ a \leq x \implies b < x$」を P とする。否定命題 $\neg P$ は

$$\exists x \in \mathbb{R}\ \ a \leq x \wedge x \leq b$$

である。

「 $a \leq b$ 」という命題を P_1 とおくと

$$\neg P \implies P_1$$

が成立している。

この逆

$$P_1 \implies \neg P$$

が成立する。なぜなら P_1 が正しいとき $x = \dfrac{a+b}{2}$ とおくと x は $a \leq x \leq b$ をみたす。よって $\neg P$ が成立し，$P_1 \implies \neg P$ は真である。

よって $\neg P$ と P_1 は同値であることが分かる。即ち

$$P_1 \quad \equiv \quad \neg P$$

が成立する。同値な命題の否定命題は同値なので

$$\neg P_1 \quad \equiv \quad P$$

が成立する。以上によりもとの命題 P は P_1 ($a \leq b$) の否定，即ち「 $a > b$ 」と同値であることが分かる。

(3) は $a > b$ のとき真，$a \leq b$ のとき偽である。

演習問題 1.9　次の命題の否定命題をつくれ。またもとの命題の真偽を確かめよ。ここで $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ は自然数全体の集合，$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ は整数全体の集合とする。

(1) $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \ x < y$

(2) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \ x < y$

(3) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \ x < y$

(4) $\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \ x < y$

(5) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \ y < x$

(6) $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ \ y < x$

命題の真偽を調べるときは，元の命題の真偽を調べてもよいし，否定命題の真偽を調べてもよい。どちらか一方の真偽を調べれば十分である。

(1)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \ x \geq y$ 」である。$x = 2$，$y = 1$ を選べば否定命題は成立する。よって元の命題は正しくない。

(2)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \ x \geq y$ 」である。

元の命題で考える。任意の実数 x(相手が指定したものと考える) に対し $y = x + 1$ とおく (自分が指定できる) と $y \in \mathbb{N}$ であり，$x < y$ が成立する。よって元の命題は正しい命題であることが分かる。

(3)　否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \ x \geq y$ 」である。

否定命題で考える。任意の実数 x に対し $y = x$ を選ぶと $x \geq y$ なので否定命題が正しい命題であることが分かる。よって元の命題は正しくない。

(4)　否定命題は「 $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \ x \geq y$ 」である。

元の命題で考える。$x = 1$，$y = 2$ を選べば元の命題が正しいことが分かる。

(5)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \ y \geq x$ 」である。

否定命題で考える。$x = 1$ とする。自然数はすべて 1 以上なので任意の実数 y に対し $y \geq x$ が成立する。よって元の命題は正しくない。

(6)　否定命題は「 $\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}\ \ y \geq x$ 」である。

元の命題で考える。任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して $y = x - 1$ とおくと $y \in \mathbb{Z}$ であり，$y < x$ が成立する。よって元の命題が正しいことが分かる。

(6) は (5) において $\mathbb{N}$ を $\mathbb{Z}$ に変えただけであるが，(5) は正しくないが (6) は正しい。それは自然数 $\mathbb{N}$ には最小値 1 が存在するが，整数 $\mathbb{Z}$ には最小値が存在しないことから導かれる。

演習問題 1.10　次のベクトルの組が $\mathbb{R}^2$ を生成するかどうか調べよ。

(1) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$　(2) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(3) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$　(4) $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ -16 \end{pmatrix}$

要綱では解析の過程と証明の両方を述べたが，ここでは証明のみ述べる。解析は各自すること。

(1)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルとする。$a_1 = \dfrac{2y - x}{3}, a_2 = \dfrac{2x - y}{3}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 &= \frac{2y - x}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2x - y}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

なので $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成する。

(2)　背理法で示す。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を生成すると仮定する。このとき $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し

$$
\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = a_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}
$$

となる実数 a_1, a_2 が存在する。このとき

$$
2 = 2a_1 + 4a_2 = \frac{2}{3}(3a_1 + 6a_2) = \frac{2}{3} \cdot 0 = 0
$$

となり，$2 = 0$ となるが，これは矛盾。よって $\mathbb{R}^2$ を生成しない。

(3)　$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルとする。$a_1 = \dfrac{7x - 4y}{2}, a_2 = \dfrac{2y - 3x}{2}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 &= \frac{7x - 4y}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{2y - 3x}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

となる。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成する。

(4)　背理法で示す。$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が $\mathbb{R}^2$ を生成すると仮定する。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ に対し

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + a_2\boldsymbol{x}_2 = a_1\begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix} 12 \\ -16 \end{pmatrix}
$$

を満たす実数 a_1, a_2 が存在する。このとき

$$-9a_1 + 12a_2 = 1$$
$$12a_1 - 16a_2 = 0$$

が成立する。このとき

$$4 = 4 \cdot 1 = 4(-9a_1 + 12a_2) = -3(12a_1 - 16a_2) = -3 \cdot 0 = 0$$

となり矛盾。よって $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は $\mathbb{R}^2$ を生成しない。