数学序論問題解説 $\sharp 3$

演習問題 1.11　次において X は Y の，1) 必要十分条件，2) 必要条件ではあるが十分条件ではない，3) 十分条件ではあるが必要条件ではない，4) 必要条件でも十分条件でもない，のいずれかであるか決定せよ。ここで x, y は実数とする。

(1) $X : x^2 = 1, \quad Y : x = 1$

(2) $X : xy > 0, \quad Y : x > 0$ かつ $y > 0$

(3) $X : xy > 0, \quad Y : x > 0$ または $y > 0$

(4) $X : xy = 0, \quad Y : x = 0$ かつ $y = 0$

(5) $X : xy = 0, \quad Y : x = 0$ または $y = 0$

(6) $X : x = 1$ でないかまたは $y = 1, \quad Y : xy = 1$

(7) $X : x = 0$ でなく，かつ $y = 0$ でない，　$Y : xy = 0$ でない

(8) $X : xy = 0$ かつ $y = x + 1, \quad Y : x = 0$ かつ $y = 1$

(9) $X : x^2 + 2x - 1 = 0$ かつ $x > 0, \quad Y : x = -1 + \sqrt{2}$

(1)　$Y \Longrightarrow X$ は正しい (このことの証明は不要であろう)。$X \Longrightarrow Y$ は $x = -1$ という反例があるので正しくない。よって X は Y であるための必要条件であるが十分条件ではない。

(2)　$Y \Longrightarrow X$ は正しい (正の数どうしをかけたものは正)。$X \Longrightarrow Y$ は $x = -1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。よって X は Y であるための必要条件であるが十分条件ではない。

(3)　$X \Longrightarrow Y$ は $x = -1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。$Y \Longrightarrow X$ は $x = 1$ かつ $y = -1$ という反例があるので正しくない。よって X は必要条件でも十分条件でもない。

(4)　$Y \Longrightarrow X$ は正しい (x, y のどちらか一方が 0 であれば積 $xy = 0$)。$X \Longrightarrow Y$ は $x = 0$ かつ $y = 1$ という反例があるので正しくない。よって X は必要条件である。

(5)　積の性質から ($xy = 0 \iff x = 0 \vee y = 0$)，$X$ は Y の必要十分条件である。

(6)　X の否定 $\neg X$ は「$x = 1 \wedge y \neq 1$」である。$\neg X$ が成立するとき積 xy は 1 にはならない。よって $\neg X \Longrightarrow \neg Y$ が成立する。対偶を考えることにより $Y \Longrightarrow X$ が成立する。$x = 2, y = 2$ のとき X は正しく，Y は正しくない。よって $X \Longrightarrow Y$ は成立しない。以上により X は必要条件である。

(7)　$\neg X$ は「$x = 0$ または $y = 0$」であり，$\neg Y$ は「$xy = 0$」なので，$\neg X$ は $\neg Y$ の必要十分条件である。よって X は Y の必要十分条件である。

(8)　$Y \Longrightarrow X$ は正しい ($x = 0, y = 1$ として xy および $x+1$ を計算すれば分かる)。$X \Longrightarrow Y$ は $x = -1$ かつ $y = 0$ という反例があるので正しくない。よって X は必要条件であるが十分条件ではない。

(9)　$-1 + \sqrt{2} > 0$ かつ $(-1 + \sqrt{2})^2 + 2(-1 + \sqrt{2}) - 1 = 0$ なので $Y \Longrightarrow X$ は正しい。$x^2 + 2x - 1 = 0$ の必要十分条件は $x = -1 + \sqrt{2}$ または $x = -1 - \sqrt{2}$ である。このなかで正の数は $-1 + \sqrt{2}$ のみである。よって $X \Longrightarrow Y$ は正しい。X は必要十分条件である。

演習問題 1.12　次の連立方程式の解を実数の範囲で求めよ。

ヒント：式を $XY = 0$ と因数分解できれば条件が低い次数の式になるので解きやすい。1 つの式で因数分解できる式がでないときは 2 つの式を組み合わせてつくるのも 1 つの方法である。

(1) $x(x^2+y^2)=0$ かつ $y(x^2+y^2-1)=0$
(2) $6x^2+y^2+10x=0$ かつ $xy+y=0$
(3) $3x^2+2y^2-6x=0$ かつ $2xy+y=0$
(4) $x+y+2x^3=0$ かつ $x+y+2y^3=0$
(5) $x^2-y=0$ かつ $y^2-x=0$
(6) $x(x^2+3y^2-1)=0$ かつ $y(3x^2+y^2-1)=0$
(7) $x^3-x+y=0$ かつ $y^3+x-y=0$
(8) $(y-2x^2y)2^{-x^2-y^2}=0$ かつ $(x-2xy^2)2^{-x^2-y^2}=0$
(9) $\sin x\,(\cos y\sin(x+y)+\sin y\cos(x+y))=0$ かつ
$\sin y\,(\cos x\sin(x+y)+\sin x\cos(x+y))=0$

(1)　$x(x^2+y^2)=0$ である必要十分条件は $x=0$ または $x^2+y^2=0$ である。$x^2+y^2=0$ である必要十分条件は $(x,y)=(0,0)$ である。よって $x(x^2+y^2)=0$ である必要十分条件は $x=0$ または $(x,y)=(0,0)$ であるが，これは $x=0$ と同値である。
　記号を用いた方が分かりやすいかもしれないので，上のことを記号を用いて書いておく。

$$\begin{aligned} x(x^2+y^2)=0 &\iff (x=0)\vee(x^2+y^2=0) \\ x^2+y^2=0 &\iff (x,y)=(0,0) \end{aligned}$$

なので

$$x=0\vee(x^2+y^2)=0 \iff x=0\vee(x,y)=(0,0) \iff x=0$$

となる。
　よって与えられた連立方程式は連立方程式

$$(x=0)\ \wedge\ y(x^2+y^2-1)=0$$

と同値である。$x=0$ を 2 番目の式に代入すると $y(y^2-1)=0$ となり，$y=0$ または $y=1$ または $y=-1$ となる。
　これらの解を最初の式に代入すると式は成立する。よって求める解は $(x,y)=(0,0)$ または $(x,y)=(0,1)$ または $(x,y)=(0,-1)$ である。

(2)　$6x^2+y^2+10x=0$ を **1 式**，$xy+y=0$ を **2 式**とする。2 式は

$$xy+y=0 \iff y(x+1)=0 \iff y=0\vee x=-1$$

と変形できる。$y=0$ を 1 式に代入すると

$$6x^2+10x=0$$

なのでこれを解いて $x=0,-\dfrac{5}{3}$ である。
　$x=-1$ を 1 式に代入すると

$$y^2-4=0$$

なのでこれを解いて $y=\pm2$ である。
　よって求める解は $(x,y)=(0,0),(-\dfrac{5}{3},0),(-1,2),(-1,-2)$ である。

(3)　$3x^2+2y^2-6x=0$ を **1 式**，$2xy+y=0$ を **2 式**とする。2 式は

$$2xy+y=0 \iff y(2x+1)=0 \iff y=0 \lor x=-\frac{1}{2}$$

と変形できる。$y=0$ を 1 式に代入すると

$$3x^2-6x=0$$

なのでこれを解いて $x=0,2$ を得る。$x=-\dfrac{1}{2}$ を 1 式に代入すると

$$2y^2+3+\frac{3}{4}=0$$

これには実数解はない。

よって求める解は $(x,y)=(0,0),(2,0)$ である。

(4)　$x+y+2x^3=0$ を **1 式**，$x+y+2y^3=0$ を **2 式**とする。1 式から 2 式を引くと $x^3-y^3=0$ を得る。$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)=0$ なので

$$x^3-y^3=0 \iff \bigl(x-y=0 \ \lor \ x^2+xy+y^2=0\bigr)$$

が成立している。

$$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2$$

x,y は実数なので $y^2\geq 0$，$\left(x+\dfrac{1}{2}y\right)^2\geq 0$ より

$$x^2+xy+y^2=\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\geq 0$$

であるが，これが 0 になるためには $y=0$ かつ $x+\dfrac{1}{2}y=0$ が必要である。

$$x^2+xy+y^2=0 \iff \left(x+\frac{1}{2}y=0 \ \land \ y=0\right) \iff (x=0 \ \land \ y=0) \iff (x,y)=(0,0)$$

となる。よって x,y が実数の場合

$$\bigl(x-y=0 \ \lor \ x^2+xy+y^2=0\bigr) \iff (x-y=0 \ \lor \ (x,y)=(0,0)) \iff x-y=0$$

が成立するので

$$x^3-y^3=0 \iff x-y=0$$

が分かる。この式を **3 式**とすると

$$1\text{ 式}\land 2\text{ 式} \iff 1\text{ 式}\land 3\text{ 式}$$

が成立するので，1 式と 3 式からなる連立方程式を解けばよいことが分かる。3 式を 1 式に代入することにより $2x^3+2x=0$ が得られる。

$$x(x^2+1)=0 \iff \bigl(x=0\lor x^2+1=0\bigr)$$

x は実数なので $x^2+1>0$ より $x^2+1=0$ となることはない。よって

$$x(x^2+1)=0 \iff x=0$$

これを 1 式に代入すると $y=0$ を得る。よって求める解は $(x,y)=(0,0)$ である。

(5)　$x^2-y=0$ を **1 式**, $y^2-x=0$ を **2 式**とする。1 式を $y=x^2$ と変形して 2 式に代入すると

$$x^4-x=x(x^3-1)=x(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$x^4-x=0 \iff x=0 \lor x=1 \lor x^2+x+1=0$$

であるが,

$$x^2+x+1=x^2+2x\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

より $x^2+x+1=0$ を満たす実数 x は存在しない。よって $x=0,1$ である。これを 1 式に代入して $(x,y)=(0,0),(1,1)$ を得る。

(6)　$x(x^2+3y^2-1)=0$ を **1 式**, $y(3x^2+y^2-1)=0$ を **2 式**とする。

$$1\text{ 式} \iff x=0 \lor x^2+3y^2-1=0$$
$$2\text{ 式} \iff y=0 \lor 3x^2+y^2-1=0$$

「$x=0$」を命題 X,「$x^2+3y^3-1=0$」を命題 A,「$y=0$」を命題 Y,「$3x^2+y^3-1=0$」を命題 B とおく。

$$1\text{ 式} \iff X \lor A$$
$$2\text{ 式} \iff Y \lor B$$

連立方程式の条件は (1 式)∧(2 式) なので

$$\begin{aligned}(1\text{ 式})\land(2\text{ 式}) &\equiv (X\lor A)\land(Y\lor B)\\ &\equiv (X\land Y)\lor(X\land B)\lor(Y\land A)\lor(B\land A)\end{aligned}$$

$X\land Y$ のとき解は $(x,y)=(0,0)$ である。
$X\land B$ のときは $x=0$ (命題 X) を $3x^2+y^2-1=0$ (命題 B) に代入すると $y=\pm1$ となる。
$Y\land A$ のときは $y=0$ (命題 Y) を $x^2+3y^2-1=0$ (命題 A) に代入すると $x=\pm1$ となる。
$A\land B$ のときは B の両辺を 3 倍したものから, A の両辺を引くと

$$8x^2-2=0$$

となるので $x=\pm\dfrac{1}{2}$ である。y も同様に計算すると $y=\pm\dfrac{1}{2}$ である。

以上により解は $(x,y)=(0,0),(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ である。

(7)　$x^3-x+y=0$ を **1 式**, $y^3+x-y=0$ を **2 式**とする。1 式と 2 式を加えると $x^3+y^3=0$ を得る。$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=0$ なので

$$x^3+y^3=0 \iff \bigl(x+y=0 \ \lor \ x^2-xy+y^2=0\bigr)$$

が成立している。

$$x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2$$

なので

$$x^2-xy+y^2=0 \iff \left(x-\frac{1}{2}y=0 \ \land \ y=0\right) \iff (x=0 \ \land \ y=0)$$

となる。よって

$$\bigl(x+y=0 \ \lor \ x^2-xy+y^2=0\bigr) \iff (x+y=0 \ \lor \ (x,y)=(0,0)) \iff x+y=0$$

が成立するので

$$x^3+y^3=0 \iff x+y=0$$

が分かる。この式を **3 式**とすると

$$1\text{ 式}\land 2\text{ 式} \iff 1\text{ 式}\land 3\text{ 式}$$

が成立するので，1 式と 3 式からなる連立方程式を解けばよいことが分かる。3 式を 1 式に代入することにより $x^3-2x=0$ が得られる。$x^3-2x=x(x^2-2)=x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$ なので $x=0,\sqrt{2},-\sqrt{2}$ となる。

　これらの解を最初に式に代入すると式は成立する。よって解は $(x,y)=(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ である。

(8)　指数関数は 0 になることはないので連立方程式は $y-2x^2y=0$ (**1 式**) かつ $x-2xy^2=0$ (**2 式**) と考えることができる。

$$\begin{aligned} y-2x^2y=y(1-2x^2)=0 \quad &\iff \quad y=0 \text{ または } 1-2x^2=0 \\ x-2xy^2=x(1-2y^2)=0 \quad &\iff \quad x=0 \text{ または } 1-2y^2=0 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} 1\text{ 式かつ }2\text{ 式} \quad \iff \quad & (1)\ x=0 \text{ かつ } y=0\text{ ，または} \\ & (2)\ x=0 \text{ かつ } 1-2x^2=0\text{ ，または} \\ & (3)\ 1-2y^2=0 \text{ かつ } y=0\text{ ，または} \\ & (4)\ 1-2y^2=0 \text{ かつ } 1-2x^2=0 \end{aligned}$$

が成立する。(1) のときは $(x,y)=(0,0)$ になる。(2) のときは $x=0$ を $1-2x^2=0$ を代入すると $1=0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(3) のとき $y=0$ を $1-2y^2=0$ を代入すると $1=0$ が成立する。これは矛盾なのでこのとき解は存在しない。(4) のときは $1-2x^2=0$ より $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$1-2y^2=0$ より $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

これらの解を最初に式に代入すると式は成立する。以上により

$$(x,y)=(0,0),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

を得る。

(9)　$\sin,\cos$ は周期 2π の周期関数なので，$(x,y)=(a,b)$ が解のとき $(x+2n\pi,y+2m\pi)$ $(m,n$ は整数$)$ も解になる。よって $0\le x<2\pi, 0\le y<2\pi$ の範囲の解を求めればよい。三角関数の加法定理を用いると与式は

$$\sin x\sin(x+2y)=0 \tag{1}$$
$$\sin y\sin(2x+y)=0 \tag{2}$$

となる。

$$(1)\iff \sin x=0\vee\sin(x+2y)=0$$
$$(2)\iff \sin y=0\vee\sin(2x+y)=0$$

であり，また

$$\sin x=0 \iff x=n\pi\ \ (n\in\mathbb{Z})$$
$$\sin y=0 \iff y=m\pi\ \ (m\in\mathbb{Z})$$

である。

(A) $\sin x=0$ **のとき：** $x=n\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ なので (2) 式に代入すると

$$\sin y\sin(2x+y)=\sin y\sin(2n\pi+y)=\sin y\sin y=0$$

となる。よって $\sin y=0$ より $y=m\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ となる。$0\le x<2\pi, 0\le y<2\pi$ より $x=0,\pi$, $y=0,\pi$ を得る。このとき $(x,y)=(0,0),(0,\pi),(\pi,0),(\pi,\pi)$ は連立方程式の解になっている。

(B) $\sin y=0$ **のとき：** (A) と同様の計算を実行することにより，解が得られる。得られた解は (A) と同じである。

(C) $\sin x\ne0\wedge\sin y\ne0$ **のとき：** $x+2y=m\pi, 2x+y=n\pi$ $(m,n\in\mathbb{Z})$ と表すことができる。後の式の 2 倍から前の式を引くことにより

$$x=\frac{1}{3}(2n-m)\pi$$

となる。m,n は整数で，$0\le x<2\pi$ なので可能性は

$$x=0,\frac{1}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi,\pi,\frac{4}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi$$

であるが，$\sin x\ne0$ より $x=0,\pi$ は不適である。よって x の可能性は $\frac{1}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi$ である。同じことを y について考えると

$$y=\frac{1}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi$$

を得る。

$\sin(x+2y)=0, \sin(2x+y)=0$ となるためには $x+2y=m\pi, 2x+y=n\pi$ となる必要がある。これらの中でそうなるのは

$$(x,y)=\left(\frac{1}{3}\pi,\frac{1}{3}\pi\right),\left(\frac{1}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right),\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right),\left(\frac{2}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi\right),$$
$$\left(\frac{4}{3}\pi,\frac{1}{3}\pi\right),\left(\frac{4}{3}\pi,\frac{4}{3}\pi\right),\left(\frac{5}{3}\pi,\frac{2}{3}\pi\right),\left(\frac{5}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi\right)$$

である。(A) の解と (C) の解をあわせたものがすべての解である。