数学序論問題解説 $\sharp 4$

演習問題 1.13　次の命題を数学的帰納法により証明せよ。ただし n は自然数とする。(6) においては積の導関数の公式 $\left[\ (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\ \right]$ を使用してよい。

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

(3) $n(n^2+2)$ は 3 で割り切れる。

(4) $n(n^4-1)$ は 5 で割り切れる。

(5) $h \geq 0$ のとき $(1+h)^n \geq 1+nh$ である。

(6) $y = x^n$ の導関数は $y' = nx^{n-1}$ である。

(1)　証明すべき命題を $P(n)$ とおく。

(A) $\dfrac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6} = 1 = 1^2$ なので $P(1)$ は成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。即ち $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ の成立を仮定する。この両辺に $(k+1)^2$ を加えると,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + k + 1\right) \\
&= (k+1)\frac{2k^2+k+6k+6}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

となる。よって $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(2)　証明すべき命題を $P(n)$ とおく。

(A) $\left(\dfrac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1 = 1^3$ なので $P(1)$ は成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。即ち $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ の成立を仮定する。この両辺に $(k+1)^3$ を加えると,

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3$$

$$
\begin{aligned}
&= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right) = (k+1)^2\frac{k^2+4k+4}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

となる。よって $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(3)　証明すべき命題を $P(n)$ とおく。

(A) $1(1^2+2)=3$ であり，3 は 3 で割り切れるので $P(1)$ は成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。このとき $k(k^2+2)$ は 3 で割り切れる。すなわちある整数 N が存在して $k(k^2+2)=3N$ と書くことができる。

$$
\begin{aligned}
(k+1)((k+1)^2+2) &= (k+1)(k^2+2k+3) = k^3+3k^2+5k+3 \\
&= k(k^2+2)+3k^2+3k+3 \\
&= k(k^2+2)+3(k^2+k+1) \\
&= 3\left(N+k^2+k+1\right)
\end{aligned}
$$

よって $(k+1)((k+1)^2+2)$ も 3 で割り切れるので $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(4)　証明すべき命題を $P(n)$ とする。

(A) $n=1$ のとき $1(1^4-1)=0$ なので 5 で割り切れる。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。即ち $k(k^4-1)$ は 5 で割り切れるとする。このときある整数 N が存在して $k(k^4-1)=5N$ となっている。

$$
\begin{aligned}
(k+1)\left((k+1)^4-1\right)-k(k^4-1) &= k^5+5k^4+10k^3+10k^2+4k-(k^5-k) \\
&= 5k^4+10k^3+10k^2+5k
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
(k+1)\left((k+1)^4-1\right) &= \left((k+1)\left((k+1)^4-1\right)-k(k^4-1)\right)+k(k^4-1) \\
&= 5(k^4+2k^3+2k^2+k)+5N \\
&= 5(k^4+2k^3+2k^2+k+N)
\end{aligned}
$$

となるので，$(k+1)\left((k+1)^4-1\right)$ も 5 で割り切れる。$n=k+1$ のときも成立するので，数学的帰納法によりすべての自然数 n に対して $P(n)$ が成立する。

(5)　命題を $P(n)$ とおく。

(A) $P(1)$ は $(1+h)^1 \geq 1+1\cdot h$ なので成立している。

(B) $P(k)$ の成立を仮定する。すなわち $(1+h)^k \geq 1+kh$ の成立を仮定する。

$$
\begin{aligned}
(1+h)^{k+1} &= (1+h)^k(1+h) \geq (1+kh)(1+h) \\
&= 1+(k+1)h+kh^2 \geq 1+(k+1)h
\end{aligned}
$$

となる。よって $P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(6)　命題を $P(n)$ とおく。
(A)

$$
\begin{aligned}
(x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 1 = 1
\end{aligned}
$$

なので $(x^1)' = 1 = 1x^0 = 1x^{1-1}$ となり $P(1)$ は成立している。
(B) $P(k)$ の成立を仮定する。すなわち $(x^k)' = kx^{k-1}$ の成立を仮定する。このとき

$$
\begin{aligned}
(x^{k+1})' &= \left(x^k x\right)' = \left(x^k\right)' x + x^k (x)' = kx^{k-1}x + x^k\cdot 1 \\
&= kx^k + x^k = (k+1)x^k = (k+1)x^{(k+1)-1}
\end{aligned}
$$

となるので，$P(k+1)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

演習問題 1.14　次の命題を数学的帰納法により証明せよ。ただし n は自然数とする。
(1) 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たし，$a_1 = p,\ a_2 = q$ を満たす数列は

$$
a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}
$$

であることを示せ。ただし $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ A = \dfrac{q-p\beta}{\alpha-\beta},\ B = \dfrac{p\alpha-q}{\alpha-\beta}$ とする。
(2) 漸化式 $a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n$ を満たし，$a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 14$ を満たす数列は

$$
a_n = 1 + 2^{n-1} + 3^{n-1}
$$

であることを示せ。

(1)　$a_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}$ が成立するという命題を $P(n)$ とする。
(A)

$$
\begin{aligned}
A\alpha^{1-1} + B\beta^{1-1} = A + B &= \frac{q-p\beta}{\alpha-\beta} + \frac{p\alpha-q}{\alpha-\beta} \\
&= \frac{p(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} = p = a_1
\end{aligned}
$$

なので $P(1)$ は成立している。
(B)

$$
\begin{aligned}
A\alpha^{2-1} + B\beta^{2-1} = A\alpha + B\beta &= \frac{q-p\beta}{\alpha-\beta}\alpha + \frac{p\alpha-q}{\alpha-\beta}\beta \\
&= \frac{q\alpha - p\beta\alpha + p\alpha\beta - q\beta}{\alpha-\beta} = \frac{q(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} \\
&= q = a_2
\end{aligned}
$$

なので $P(2)$ は成立している。

(C) $P(k)$ および $P(k+1)$ の成立を仮定する。

$$\begin{aligned} a_{k+2} = a_{k+1} + a_k &= A\alpha^k + B\beta^k + A\alpha^{k-1} + B\beta^{k-1} \\ &= A(\alpha^k + \alpha^{k-1}) + B(\beta^k + \beta^{k-1}) \\ &= A\alpha^{k-1}(\alpha+1) + B\beta^{k-1}(\beta+1) \end{aligned}$$

が成立する。ここで $\alpha,\ \beta$ は $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$ を満たすので $x^2-x-1=0$ の 2 解である。よって $\alpha^2=\alpha+1,\ \beta^2=\beta+1$ が成立する。ここでは 2 次方程式の解と係数の関係を用いたが直接計算してもよい。よって上式は $A\alpha^{(k+2)-1}+B\beta^{(k+2)-1}$ となり $P(k+2)$ の成立が示される。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

(2)　$a_n = 1+2^{n-1}+3^{n-1}$ が成立するという命題を $P(n)$ とする。

(A)

$$1+2^{1-1}+3^{1-1} = 1+1+1 = 3 = a_1$$

なので $P(1)$ は成立している。

(B)

$$1+2^{2-1}+3^{2-1} = 1+2+3 = 6 = a_2$$

なので $P(2)$ は成立している。

(C)

$$1+2^{3-1}+3^{3-1} = 1+4+9 = 14 = a_3$$

なので $P(3)$ は成立している。

(D) $P(k)$ および $P(k+1)$，$P(k+2)$ の成立を仮定する。 このとき

$$\begin{aligned} a_{k+3} &= 6a_{k+2} - 11a_{k+1} + 6a_k \\ &= 6(1+2^{k+1}+3^{k+1}) - 11(1+2^k+3^k) + 6(1+2^{k-1}+3^{k-1}) \\ &= 6-11+6+(6\cdot 2^2 - 11\cdot 2 + 6)2^{k-1} + (6\cdot 3^2 - 11\cdot 3 + 6)3^{k-1} \\ &= 1 + 8\cdot 2^{k-1} + 27\cdot 3^{k-1} = 1 + 2^3\cdot 2^{k-1} + 3^3\cdot 3^{k-1} \\ &= 1 + 2^{k+2} + 3^{k+2} = 1 + 2^{(k+3)-1} + 3^{(k+3)-1} \end{aligned}$$

となるので $P(k+3)$ も成立している。数学的帰納法によりすべての自然数 n に対し $P(n)$ が成立する。

演習問題 1.15　次の論法のどこが誤りかを指摘せよ。

「すべてのトランプのカードのスーツ (スペード，ハート等) は同じである」ことを証明する。1 組のトランプを用意する。勿論表を下にしてカードは見えない状態でおいておく。1 枚のトランプを取り出して表にする。そのトランプのスーツが仮りにハートだったとする。このとき命題 $P(k)$ を「取り出した k 枚のトランプのスーツはすべてハートである」とする。まず $P(1)$ は真である。次に $P(k)$ が真だとする。即ち取り出された k 枚のカードはすべてハートである。このとき 1 枚を手に隠し，新たに 1 枚取り出す。「取り出した k 枚のカードはすべて

ハート」なので新たに取り出したカードはハートである。手に隠した 1 枚を取り出すとすべてハートのカードが $k+1$ 枚になる。よって $P(k+1)$ は正しい。数学的帰納法により証明された。

結論が間違いなのは明白なので議論のどこかが間違っているのは確かであるが，具体的にどこが間違っているかを指摘せよという問題である。自分でこの問題を考えていない人は，次を読む前に自分で考えて，それから読むように。

数学的帰納法を適用するには命題 $P(n)$ が明確になっていなければならない。$P(k)$ は「取り出した k 枚のトランプのスーツはすべてハートである」なので明確だと思うかもしれないがそうではない。これには次の 2 通りの解釈がある。

- k 枚のトランプを取り出すのに，どのような取りだし方をしても，すべてハートである。
- k 枚のトランプを取り出すのに，ある取りだし方をした場合，すべてハートである。

2 つは違う命題なので，前者を $P_1(k)$，後者を $P_2(k)$ とする。最初に 1 枚取り出して，それがハートだったとしているので，この場合「任意の取りだし方」ではなく「ある取りだし方」である。よって本文で成立が仮定されたのは $P_1(1)$ ではなく $P_2(1)$ である。

$P(k)$ の成立を仮定して $P(k+1)$ の成立を示す部分で $P(k)$ を $P_2(k)$ と解釈した場合，本文で述べられた証明は間違っている。$P(k)$ を $P_1(k)$ と解釈した場合，本文で述べられた証明は正しい。即ち「$P_1(k) \implies P_1(k+1)$」が成立する。

以上により，本文で示されたことは

- $P_2(1)$ が成立する。
- $P_1(k)$ が成立すれば $P_1(k+1)$ が成立する。

ということである。この 2 つでは数学的帰納法を適用することはできない。