数学序論問題解説 $\sharp 7$

演習問題 3.1　次の計算をせよ。

(1) $(3+5i)+(4-7i)$　　(2) $(2+3i)(3-4i)$

(3) $\dfrac{5+3i}{1+2i}$　　(4) $\dfrac{1}{5-2i}$

(1)　$7-2i$

(2)　$18+i$

(3)　$\dfrac{5+3i}{1+2i}=\dfrac{(5+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{11}{5}-\dfrac{7}{5}i$

(4)　$\dfrac{1}{5-2i}=\dfrac{5+2i}{(5-2i)(5+2i)}=\dfrac{5}{29}+\dfrac{2}{29}i$

演習問題 3.2　命題 3.2 を証明せよ。

$\alpha=a+bi$，$\alpha_1=a_1+b_1i$，$\alpha_2=a_2+b_2i$ とおく。ただし a,b,a_1,b_1,a_2,b_2 は実数とする。

(1)　$\alpha\in\mathbb{R}$ のとき $b=0$ なので $\alpha=a$ であり，$\overline{\alpha}=a-bi=a-0i=a=\alpha$

逆に $\overline{\alpha}=\alpha$ とすると $a+bi=\alpha=\overline{\alpha}=a-bi$ なので $2bi=0$ より $b=0$ よって $\alpha=a\in\mathbb{R}$ が成立する。

(2)　$\overline{\alpha}=a-bi=a+(-b)i$ なので，$\overline{\overline{\alpha}}=a-(-b)i=a+bi=\alpha$ となる。

(3)　$\alpha_1+\alpha_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ なので

$$\begin{aligned}\overline{\alpha_1+\alpha_2}&=\overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i}\\&=(a_1+a_2)-(b_1+b_2)i\\&=a_1-b_1i+a_2-b_2i\\&=\overline{\alpha_1}+\overline{\alpha_2}\end{aligned}$$

(4)　$\alpha_1\cdot\alpha_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$ なので

$$\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2}=\overline{(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i}=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i$$

であるが,

$$\overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2}=(a_1-b_1i)\cdot(a_2-b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)-(a_1b_2+a_2b_1)i$$

となるので $\overline{\alpha_1\cdot\alpha_2}=\overline{\alpha_1}\cdot\overline{\alpha_2}$ が成立する。

(5)

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

なので

$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)-(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

となる。一方

$$\frac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}}=\frac{a_1-b_1i}{a_2-b_2i}=\frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)-(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

となるので

$$\overline{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)} = \frac{\overline{\alpha_1}}{\overline{\alpha_2}}$$

が成立する。

演習問題 3.3 次を順に示すことで，実数係数の多項式は実数係数の 2 次式と 1 次式の積に因数分解されることを示せ。

(1) a, b, c, d を実数とし，$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とする。複素数 α が $f(x) = 0$ の解ならば，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ も $f(x) = 0$ の解である。即ち複素数 α に対し $f(\alpha) = 0$ ならば $f\left(\overline{\alpha}\right) = 0$ である。

(2) 実数係数の多項式 $f(x)$ に対し複素数 α が $f(\alpha) = 0$ ならば $f\left(\overline{\alpha}\right) = 0$ である。

(3) 実数係数の多項式 $f(x)$ に対し，実数でない複素数 α が存在して $f(\alpha) = 0$ となるとき，実数係数の 2 次式が存在して $f(x)$ はその 2 次式で割り切れる。

(4) 実数係数の多項式 $f(x)$ は実数係数の 2 次式と 1 次式の積に因数分解される。

(1) α は $f(x) = 0$ の解なので

$$f(\alpha) = a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d = 0 \tag{1}$$

式 (1) の両辺の共役複素数をとると

$$\begin{aligned}\overline{f\left(\alpha\right)} &= \overline{a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d} = \overline{a\alpha^3} + \overline{b\alpha^2} + \overline{c\alpha} + \overline{d} \\ &= \overline{a} \cdot \overline{\alpha^3} + \overline{b} \cdot \overline{\alpha^2} + \overline{c} \cdot \overline{\alpha} + \overline{d} = \overline{a} \cdot \left(\overline{\alpha}\right)^3 + \overline{b} \cdot \left(\overline{\alpha}\right)^2 + \overline{c} \cdot \overline{\alpha} + \overline{d} = \overline{0} = 0\end{aligned}$$

a, b, c, d は実数なので $\overline{a} = a, \overline{b} = b, \overline{c} = c, \overline{d} = d$ より

$$f\left(\overline{\alpha}\right) = a\left(\overline{\alpha}\right)^3 + b\left(\overline{\alpha}\right)^2 + c\overline{\alpha} + d = 0$$

(2) $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ を実数とし，$f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ とする。α が $f(x) = 0$ の解なので $f(\alpha) = 0$ が成立している。両辺の共役複素数をとると

$$\begin{aligned}0 = \overline{0} = \overline{f(\alpha)} &= \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k\alpha^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k\alpha^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} \cdot \overline{\alpha^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k\overline{\alpha^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\overline{\alpha}\right)^k = f\left(\overline{\alpha}\right)\end{aligned}$$

(3) $f(\alpha) = 0$ より $f(x)$ は $x - \alpha$ で割り切れる。$f\left(\overline{\alpha}\right) = 0$ より $f(x)$ は $x - \overline{\alpha}$ で割り切れる。

α は実数でないので $\overline{\alpha} \neq \alpha$ より $x - \alpha \neq x - \overline{\alpha}$ である。よって $f(x)$ は $(x - \alpha)(x - \overline{\alpha})$ で割り切れる。$\alpha = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とすると，$\overline{\alpha} = a - ib$ である。

$$(x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = (x - (a + ib))\,(x - (a - ib)) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

となるので実数係数の 2 次式である。
(4)　多項式の次数を n とするとき命題 $P(n)$ を「n 次の実数係数多項式は実数係数の 1 次式または 2 次式の積に因数分解できる」とし，数学的帰納法で証明する。

$n=1$ のとき実数係数の 1 次式は 1 個の 1 次式と 0 個の 2 次式の積に因数分解されているので，成立している。

次数が n より小さい実数係数多項式が実数係数の 2 次式と次数係数の 1 次式の積に因数分解されていると仮定する。$f(x)$ を n 次の実数係数の多項式とする。代数学の基本定理より $f(x)=0$ には複素数解 α が存在する。すなわち $f(\alpha)=0$ が成立する。

α が実数のとき $f(x)=(x-\alpha)g(x)$ と因数分解される。$g(x)$ は実数係数の多項式で次数は $n-1$ 次である。帰納法の仮定から $g(x)$ は実数係数の 2 次式と実数係数の 1 次式の積に分解されている。よって $f(x)$ も実数係数の 2 次式と 1 次式の積に因数分解されている。

α が実数ではないとき $f(x)$ は実数係数の 2 次式 $(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$ で $f(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})g(x)$ と因数分解される。$g(x)$ は実数係数の $n-2$ 次式多項式なので，帰納法の仮定より実数係数の 2 次式と 1 次式の積に分解されている。よって $f(x)$ も実数係数の 2 次式と 1 次式の積に因数分解されている。

演習問題 3.4　次の問に答えよ。
(1) $\alpha=0 \iff |\alpha|=0$ を証明せよ。
(2) $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha||\beta|$ を示せ。

(1)　$\alpha=a_1+a_2i$ とおくと $a_1,a_2\in\mathbb{R}$ なので

$$\alpha=0 \iff a_1=0 \text{ かつ } a_2=0 \iff a_1^2+a_2^2=0 \iff |\alpha|=0$$

となり成立する。
(2)　$\alpha=a_1+b_1i$，$\beta=a_2+b_2i$ とおくと

$$\alpha\cdot\beta=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$

なので

$$\begin{aligned}|\alpha\cdot\beta|^2&=(a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2\\&=a_1^2a_2^2-2a_1a_2b_1b_2+b_1^2b_2^2+a_1^2b_2^2+2a_1b_2a_2b_1+a_2^2b_1^2\\&=a_1^2(a_2^2+b_2^2)+b_1^2(a_2^2+b_2^2)\\&=(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)\\&=(|\alpha|\,|\beta|)^2\end{aligned}$$

となる。$|\alpha\cdot\beta|\geq 0$，$|\alpha|\geq 0$，$|\beta|\geq 0$ より $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\,|\beta|$ となる。

共役複素数を用いる別解もある。紹介しておこう。$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}$，$|\beta|^2=\beta\overline{\beta}$ なので

$$|\alpha\cdot\beta|^2=(\alpha\beta)\overline{\alpha\beta}=\alpha\beta\overline{\alpha}\,\overline{\beta}=\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}=|\alpha|^2|\beta|^2$$

あとは前と同様である。

演習問題 3.5　図 3.1 を参考にして定理 3.3 を証明せよ。

ここでは幾何的方法と代数的方法の 2 つを紹介しておく。最初は幾何的方法である。
三角形の 3 辺の長さを a, b, c とすると

$$a < b + c$$

が成立する。この式も三角不等式と呼ばれるが，定理の式との区別のためここでは仮に幾何的三角不等式と呼んでおく。幾何的方法では幾何的三角不等式の成立を仮定して証明する。
(1)　O，α，$\alpha + \beta$ を直線で結んだ図形を考える。これが 3 角形になっている場合を最初に考える。この 3 角形の 3 辺の長さは $|\alpha|$，$|\beta|$，$|\alpha + \beta|$ なので幾何的三角不等式より

$$|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$$

が成立する。
次に O，α，$\alpha + \beta$ を直線で結んだ図形が三角形にならない場合を考える。最初に $\alpha = 0$ のとき。このときは

$$|\alpha + \beta| = |0 + \beta| = |\beta| = 0 + |\beta| = |\alpha| + |\beta|$$

となり等号が成立している。$\beta = 0$ の場合も同様である。
$\alpha \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ で O，α，$\alpha + \beta$ を直線で結んだ図形が三角形にならないのは O, α, β が一直線に並ぶときのみである。このときは実数 t が存在して $\beta = t\alpha$ と書けている。実数 t に対しては

$$|1 + t| \leq 1 + |t|$$

が成立している。このとき

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta| &= |\alpha + t\alpha| = |\alpha(1 + t)| = |\alpha|\,|1 + t| \\ &\leq |\alpha|(1 + |t|) = |\alpha| + |\alpha|\,|t| \\ &= |\alpha| + |\alpha t| = |\alpha| + |\beta| \end{aligned}$$

となる。以上より不等式の成立が示される。
(2)　$\gamma = \alpha - \beta$ とおいて β, γ に (1) の不等式を適用すると

$$|\beta + \gamma| \leq |\beta| + |\gamma|$$

が成立する。$\beta + \gamma = \alpha$ なので移項すると (2) 式の成立が分かる。

次に代数的証明を紹介する。シュワルツの不等式は既知とする (問題解説の後で証明を述べる)。シュワルツの不等式とは実数 a, b, c, d に対し

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

が成立するというものである。
$\alpha = a + ib$，$\beta = c + id$ とおくと $\alpha + \beta = (a + c) + i(b + d)$ なので

$$|\alpha + \beta|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2, \quad |\alpha|^2 = a^2 + b^2, \quad |\beta|^2 = c^2 + d^2$$

となっている。シュワルツの不等式：$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$ を用いると

$$\begin{aligned}
|\alpha+\beta|^2 &= (a+c)^2+(b+d)^2 = a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2 \\
&= a^2+b^2+2(ac+bd)+c^2+d^2 \\
&\leq |\alpha|^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}+|\beta|^2 \\
&= |\alpha|^2+2|\alpha|\,|\beta|+|\beta|^2 = (|\alpha|+|\beta|)^2
\end{aligned}$$

となる。$|\alpha+\beta| \geq 0$ なので

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$$

を得る。証明した式において $\alpha \to \alpha-\beta$ という置き換えを行うと (2) の式が得られる。

シュワルツの不等式を証明しよう。

$$\begin{aligned}
(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2 &= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-(a^2c^2+2acbd+b^2d^2) \\
&= a^2d^2-2adbc+b^2c^2 = (ad-bc)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

より

$$(ac+bd)^2 \leq (a^2+b^2)(c^2+d^2)$$

が成立する。

一般のシュワルツの不等式は次の形である。

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leq (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

前と同様の計算で証明もできるが，ここでは 2 次方程式の判別式を用いる方法の証明を紹介する。

各 i $(i=1,2,\ldots,n)$ に対し

$$a_i^2x^2+2a_ib_ix+b_i^2 = (a_ix+b_i)^2 \geq 0 \tag{1}$$

が成立する。式 (1) を $i=1$ から n まで加えると

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)x^2+2\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)x+\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq 0 \tag{2}$$

が成立する。(2) の左辺 $=0$ という 2 次方程式の判別式を D とすると $D \leq 0$ である。

$$\frac{D}{4} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

より成立が示される。