数学序論問題解説 $\sharp 8$

演習問題 3.6　次の複素数の極形式を求めよ。また複素平面に対応する点を図示せよ。
(1) $1+i\sqrt{3}$　　(2) -2　　(3) i　　(4) $2\sqrt{3}-2i$　　(5) $1-\sqrt{3}i$

(1)　$|1+i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$ なので

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

と書ける。$2\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$ と表してもよい。ここで $\exp(x) = e^x$ という記法を用いた。
(2)　$|-2| = \sqrt{(-2)^2+0^2} = 2$ なので

$$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2e^{i\pi}$$

となる。
(3)　$|i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$ なので

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$$

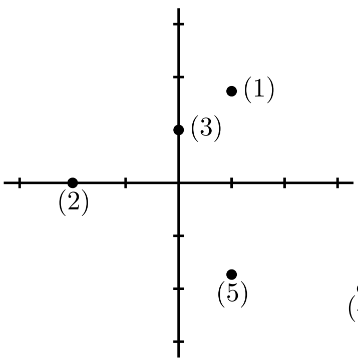
となる。
(4)　$|2\sqrt{3}-2i| = \sqrt{12+4} = 4$ なので

$$2\sqrt{3}-2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\exp\left(-i\frac{\pi}{6}\right)$$

となる。偏角をマイナスで選んだが $\frac{11\pi}{6}$ としてもよい。
(5)　$|1-\sqrt{3}i| = 2$ なので

$$1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\exp\left(-i\frac{\pi}{3}\right)$$

となる。偏角をマイナスで選んだが $\frac{5\pi}{3}$ としてもよい。



演習問題 3.7　次の問に答えよ。
(1) $e^{i\theta}$ は，原点を中心とする半径 1 の円上の点であることを示せ。
(2) オイラーの公式を用いて次の等式を導け。

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

(1)　$|e^{i\theta}| = |\cos\theta + i\sin\theta| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$ なので原点を中心とする半径 1 の円周上にある。
(2)　$\cos(-\theta) = \cos\theta$，$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ より

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$

となるので，

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta, \quad e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$$

となる。これから (2) の式を得る。

演習問題 3.8　次の問に答えよ。
(1) $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$ を示せ。
(2) 系 3.6 を数学的帰納法を用いて証明せよ。

(1)

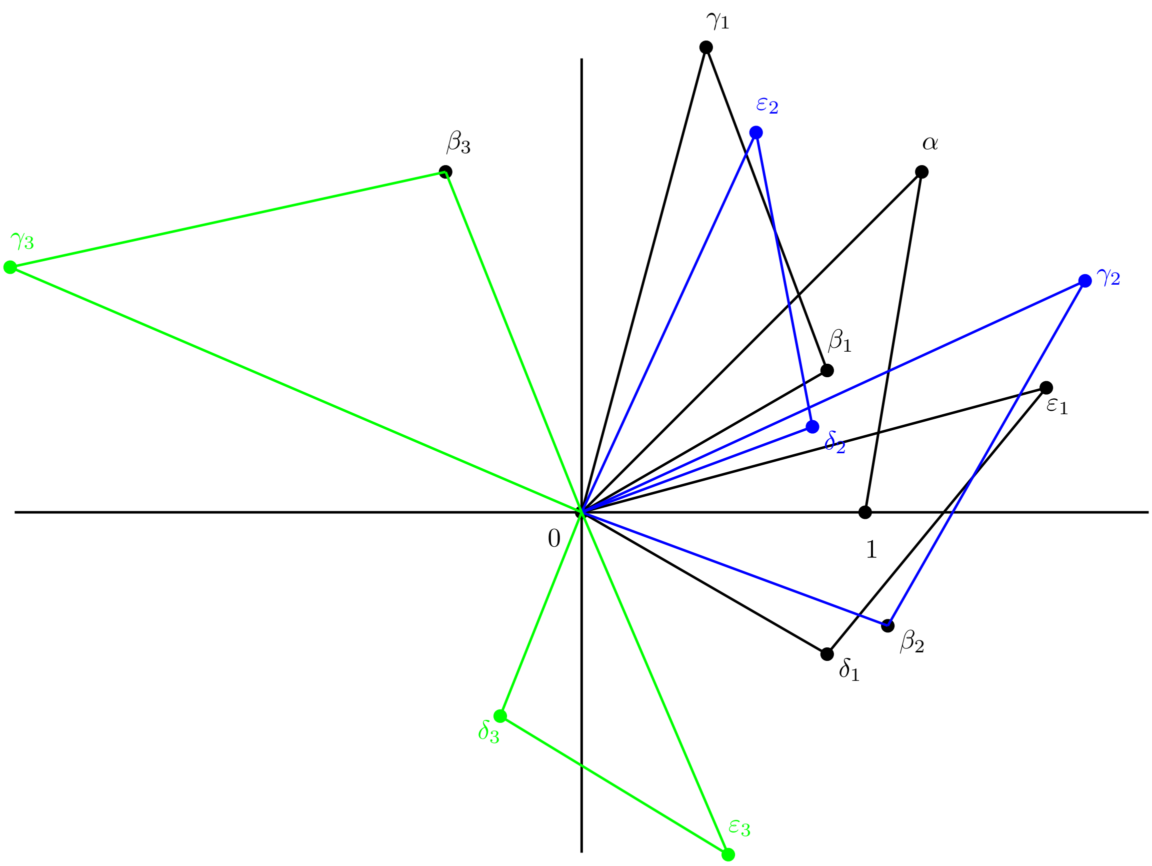
$$(e^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta}e^{-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^0} = e^{-i\theta}$$

(2)　n に関する数学的帰納法で証明する。$n=1$ のとき示すべき式は $(e^{i\theta})^1 = e^{i1\theta}$ なので成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する; 即ち $(e^{i\theta})^k = e^{ik\theta}$ が成立していると仮定する。

$$(e^{i\theta})^{k+1} = (e^{i\theta})^k e^{i\theta} = e^{ik\theta}e^{i\theta} = e^{ik\theta+i\theta} = e^{i(k+1)\theta}$$

となり $n=k+1$ の成立が示された。よってすべての自然数に対し成立している。

演習問題 3.9　次の点を作図により図示せよ。



(1) $\alpha\beta_1$　(2) $\dfrac{\alpha}{\beta_1}$　(3) $\alpha\beta_2$　(4) $\dfrac{\alpha}{\beta_2}$　(5) $\alpha\beta_3$　(6) $\dfrac{\alpha}{\beta_3}$

上図の様になる。ただし $\gamma_i = \alpha\beta_i$，$\delta_i = \dfrac{1}{\beta_i}$，$\varepsilon_i = \alpha\delta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ とした。

$\alpha\beta_1$ を作図するためには，三角形 01α と相似な三角形を線分 $0\beta_1$ を 1 辺として作る。ただし線分 $0\beta_1$ と線分 01 が対応するように三角形を描く。新しく作られた三角形の 0，β_1 以外の頂点が $\gamma_1 = \alpha\beta_1$ である。$\alpha\beta_2$ 等も同様である。

$\dfrac{\alpha}{\beta_1}$ を作図するためには，最初に $\delta_1 = \dfrac{1}{\beta_1}$ を作図する。

三角形 $01\beta_1$ と相似な三角形を線分 01 を 1 辺として作る。ただし線分 $0\beta_1$ と線分 01 が対応するように三角形を描く。新しく作られた三角形の 0，1 以外の頂点が $\delta_1 = \dfrac{1}{\beta_1}$ である。α と δ_1 から前と同様に作図すればよい。$\dfrac{\alpha}{\beta_2}$ 等も同様である。

演習問題 3.10

(1)　1 の 4 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。
(2)　1 の 3 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。
(3)　1 の 6 乗根を具体的に求め，複素平面に図示せよ。
(4)　1 の 5 乗根を求め，複素平面に図示せよ。

(1)　1 の 4 乗根は $x^4 - 1 = 0$ の解なので

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

の解である。よって解は $x=1,-1,i,-i$ となる。図示すると最後の図のようになる。
(2)　1 の 3 乗根は $x^3=1$ の解なので

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$$

より $x=1$ または $x^2+x+1=0$ を満たす。$x^2+x+1=0$ のとき

$$x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

なので $1,\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ が求めるものである。$\omega=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ とおくと $\omega^2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ なので図の様になる。
(3)　1 の 6 乗根は $x^6=1$ の解なので

$$x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$$

より $x=1$ または $x=-1$ または $x^2+x+1=0$ または $x^2-x+1=0$ を満たす。$x^2+x+1=0$ のとき

$$x=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

であり，$x^2-x+1=0$ のとき

$$x=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

なので $1,-1,\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2},\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2},\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ が求めるものである。$\lambda=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ とおくと，$\lambda^2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\omega$，$\lambda^3=-1$，$\lambda^4=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\omega^2$，$\lambda^5=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$，なので図の様になる。
(4)　5 乗根は

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right),\exp\left(\frac{4\pi i}{5}\right),\exp\left(\frac{6\pi i}{5}\right),\exp\left(\frac{8\pi i}{5}\right),\exp\left(\frac{10\pi i}{5}\right)=1$$

である。

5 乗根については「具体的に求めよ」とは書いていないので，以下のことは不要である。この場合「複 2 次式」と考えることにより求めることができるので書いておく。

1 の 5 乗根は $x^5=1$ の解なので

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$$

より $x=1$ または $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ を満たす。$x^4+x^3+x^2+x+1=0$ のとき両辺を x^2 で割ると $x^2+x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$ となる。$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと $t^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$ なので t は 2 次方程式

$$t^2+t-1=0$$

の解である。これを解くと $t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ が得られる。$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$x+\frac{1}{x}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

を解くと

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\quad x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。$t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$x+\frac{1}{x}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

を解くと

$$x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},\quad x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

が得られる。よって

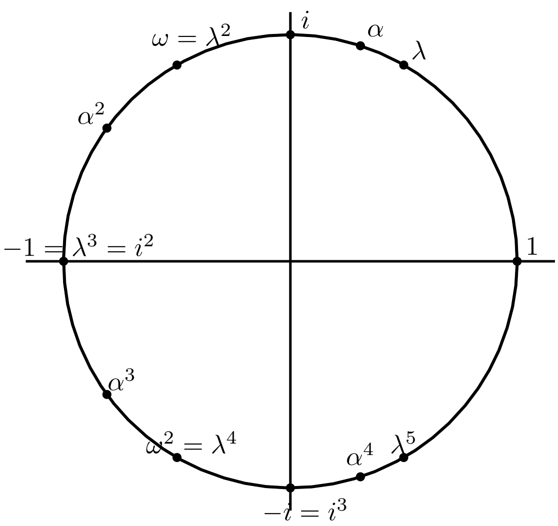
$1,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4},\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4},$
$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

が求める解である。

$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ とおくと

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4}+i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\\ \alpha^3 &= \frac{-1-\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\\ \alpha^4 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\end{aligned}$$

なので図の様になる。

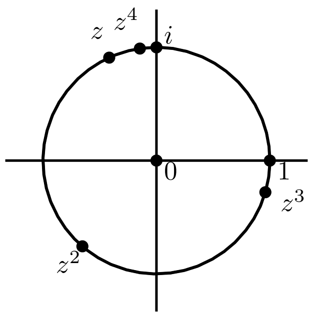


演習問題 3.11 $z=e^{2i}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) z,z^2,z^3,z^4 を複素平面に図示せよ。

(2)　異なる自然数 m, n に対し $z^m \neq z^n$ を示せ。ただし π が有理数でないことは既知としてよい。

(1) $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3.14}{2} < 2 < 3.14 = \pi$ なので z は図の位置にある。$z^2 = e^{4i}$ であり，$\pi = 3.14 < 4 < \dfrac{3\pi}{2}$ なので z^2 は図の位置にある。$z^3 = e^{6i}$ であり，$\dfrac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$ なので z^3 は図の位置にある。$z^4 = e^{8i}$ であり，$2\pi + \dfrac{\pi}{2} < 8 < 3\pi$ である。また $8 < 2 + 2\pi$ なので z^4 は図の位置にある。



(2) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ なので $e^{ix} = 1$ となるのは $x = 2k\pi$ (k は整数) のときであり，かつそのときに限る。

　$z^m = z^n$ とすると $z^{m-n} = 1$ 即ち

$$e^{i2(m-n)} = 1$$

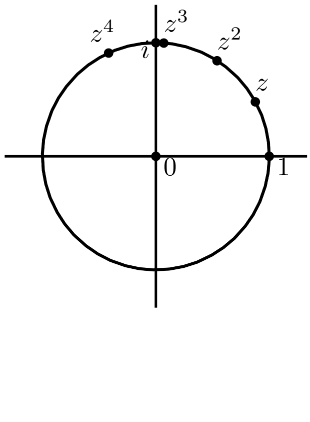
となる。このときある整数 k が存在して $2(m-n) = 2k\pi$ となる。m と n が異なる自然数とすると $k \neq 0$ である。このとき $\pi = \dfrac{m-n}{k}$ より π が有理数となり矛盾。よって異なる自然数 m, n に対しては $z^m \neq z^n$ である。

演習問題 3.12

(1)　$z = e^{i\frac{1}{2}} = \exp\left(i\frac{1}{2}\right)$ とする。z, z^2, z^3, z^4 を複素平面に図示せよ。

(2)　n を自然数とし，$z = e^{i\frac{1}{n}} = \exp\left(i\dfrac{1}{n}\right)$ とする。z は第 1 象限にある。すなわち $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とするとき $a > 0, b > 0$ である。z^2, z^3 も第 1 象限にあるとする。$z^4, z^5, \ldots$ と順に次々に計算して行ったとき，z^{29} までは第 1 象限にあり，z^{30} で初めて第 2 象限となった。n を求めよ。ただし $\pi = 3.14$ とする。

(1)



(2)　n を自然数とし，$z = e^{i\frac{1}{n}} = \exp\left(i\dfrac{1}{n}\right)$ とする。z は第 1 象限にある。すなわち $z = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とするとき $a > 0, b > 0$ である。z^2, z^3 も第 1 象限にあるとする。$z^4, z^5, \ldots$ と順に次々に計算して行ったとき，z^{29} までは第 1 象限にあり，z^{30} で初めて第 2 象限となった。n を求めよ。ただし $\pi = 3.14$ とする。

$z^{29} = \exp\left(i\dfrac{29}{n}\right)$ が第 1 象限にあり，$z^{30} = \exp\left(i\dfrac{30}{n}\right)$ が第 2 象限にあることより

$$\frac{29}{n} < \frac{\pi}{2} < \frac{30}{n}$$

これより

$$18.471 = \frac{58}{\pi} < n < \frac{60}{\pi} = 19.108$$

となり，n は自然数なので $n = 19$ である。