数学序論問題解説 $\sharp 10$

演習問題 4.6　命題 4.4 を証明せよ。

何度か扱っているが，再度書いておく。

最初に f が単調増加の場合を考える。f は単調増加なので

$$\forall x_1, x_2 \in I \ x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$

が成立している。f が単射であるとは「$\forall x_1, x_2 \in I \ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$」が成立することを示せばよい。$x_1, x_2 \in I$ に対して $x_1 \neq x_2$ が成立しているとする。このとき「$x_1 < x_2$ または $x_2 < x_1$」が成立している。$x_1 < x_2$ のとき単調増加より $f(x_1) < f(x_2)$ が成立し，$x_2 < x_1$ のとき単調増加より $f(x_2) < f(x_1)$ が成立する。いずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成立するので，f は単射である。

次に f が単調減少の場合を考える。f は単調減少なので

$$\forall x_1, x_2 \in I \ x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$

が成立している。f が単射であるとは「$\forall x_1, x_2 \in I \ x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$」が成立することを示せばよい。$x_1, x_2 \in I$ に対して $x_1 \neq x_2$ が成立しているとする。このとき「$x_1 < x_2$ または $x_2 < x_1$」が成立している。$x_1 < x_2$ のとき単調減少より $f(x_1) > f(x_2)$ が成立し，$x_2 < x_1$ のとき単調減少より $f(x_2) > f(x_1)$ が成立する。いずれの場合も $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成立するので，f は単射である。

演習問題 *4.7　定理 4.6 を用いて命題 4.7 を証明せよ。

命題 4.4 より f は単射なので全射性について示す。

最初に $I = (\,a, b\,), J = (\,\alpha, \beta\,)$ のときを考える。J の任意の元 y に対し $x_1, x_2 \in I$ が存在して $f(x_1) < y < f(x_2)$ となることを示す。

y を J の任意の元とすると $\alpha < y < \beta$ が成立している。

(1)　a, α が実数の場合を考える。$\lim_{x \to a+0} f(x) = \alpha$ より，$\varepsilon = y - \alpha$ とおくと $\delta > 0$ が存在して，任意の x に対し $a < x < a + \delta$ ならば $-(y - \alpha) < f(x) - \alpha < y - \alpha$ が成立する。よって $a < x_1 < a + \delta$ となる x_1 を 1 つ選ぶと $f(x_1) < y$ が成立する。

(2)　a が実数で $\alpha = -\infty$ の場合，任意の M に対し $\delta > 0$ が存在し，$a < x < a + \delta$ なら $f(x) < M$ が成立する。特に $M = y$ を選ぶと $f(x_1) < y$ となる x_1 が存在する。

(3)　$a = -\infty$ で α が実数の場合，$\varepsilon = y - \alpha$ に対し N が存在し，$x < N$ ならば $-(y - \alpha) < f(x) - \alpha < y - \alpha$ が成立する。よって $x_1 < N$ となる x_1 に対し $f(x_1) < y$ が成立する。

(4)　$a = -\infty, \alpha = -\infty$ の場合，y に対し N が存在し $x < N$ ならば $f(x) < y$ が成立する。$x_1 < N$ となる x_1 を選ぶと $f(x_1) < y$ が成立する。

よってすべての場合で $f(x_1) < y$ となる x_1 が存在する。

(1)　b, β が実数の場合，$\lim_{x \to b-0} f(x) = \beta$ より $\varepsilon = \beta - y$ とおくと $\delta > 0$ が存在して，任意の x に対して $b - \delta < x < b$ ならば $-(\beta - y) < f(x) - \beta < \beta - y$ が成立する。よって $b - \delta < x_2 < b$ となる x_2 を 1 つ選ぶと $y < f(x_2)$ が成立する。

(2)　bが実数, $\beta = \infty$ の場合, 任意の M に対し $\delta > 0$ が存在して, 任意の x に対し $b-\delta < x < b$ ならば $M < f(x)$ が成立する。特に $M = y$ とおくと $y < f(x_2)$ となる x_2 が存在する。
(3)　$b = \infty$ で β が実数の場合, $\varepsilon = \beta - y$ に対し N が存在し, $N < x$ ならば $-(\beta - y) < f(x) - \beta < \beta - y$ が成立する。よって $N < x_2$ となる x_2 に対し $y < f(x_2)$ が成立する。
(4)　$b = \infty, \beta = \infty$ の場合, y に対し N が存在し $N < x$ ならば $y < f(x)$ が成立する。$N < x_2$ となる x_2 を選ぶと $y < f(x_2)$ が成立する。

よってすべての場合で $y < f(x_2)$ となる x_2 が存在する。

$f(x)$ は単調増加で, $f(x_1) < y < f(x_2)$ なので $x_1 < x_2$ である。$L = [\, x_1, x_2 \,]$ に対し中間値の定理を適用すると $x \in I$ で $f(x) = y$ となる元が存在する。よって $y \in f(I)$ である。以上により $f(I) = J$ が成立し, f が全射であることが示される。

次に I, J が閉区間のときを考える。y を J の任意の元とする。$\alpha < y < \beta$ のときは開区間のとき示したのと同様の議論である $x \in I$ が存在して $y = f(x)$ となる。

よって $y = \alpha$ または $y = \beta$ の場合を考える。$y = \alpha$ のとき $f(a) = \alpha$ であり, $y = \beta$ のとき $f(b) = \beta$ である。よってこの場合も成立する。

以上により $J = f(I)$ が分かる。

半開区間ときは, 開区間の一方の議論をすることにより全射であることが分かる。

演習問題 4.8　命題 4.7 と同様の結果が単調減少関数に関しても成立する。すなわち次が成立する。このことを命題 4.7 を既知として証明せよ。

$f : I \longrightarrow J$ を単調減少で連続な関数とする。

I が閉区間 $[\, a, b \,]$ のとき J も閉区間 $[\, \alpha, \beta \,]$ とする。

I が開区間 $(\, a, b \,)$ のとき J も開区間 $(\, \alpha, \beta \,)$ とする。

I が半開区間 $[\, a, b \,)$ のとき J は半開区間 $(\, \alpha, \beta \,]$ とする。

I が半開区間 $(\, a, b \,]$ のとき J は半開区間 $[\, \alpha, \beta \,)$ とする。

$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \beta, \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \alpha$ が成立しているときいずれの場合も $f : I \longrightarrow J$ は全単射である。

$g(x) = -f(x), J' = \{\, -y \mid y \in J \,\}$ とおくと g は $g : I \longrightarrow J'$ で単調増加関数で, 連続である。また

$$\lim_{x \to a+0} g(x) = \lim_{x \to a+0} (-f(x)) = -\lim_{x \to a+0} f(x) = -\beta$$
$$\lim_{x \to b-0} g(x) = \lim_{x \to b-0} (-f(x)) = -\lim_{x \to b-0} f(x) = -\alpha$$

となるので, g は演習問題 4.7 の仮定を満たしているので全射である。

f の単射性はすでに示されているので, f が全射であることを証明する。$y \in J$ を任意の元とする。このとき $-y \in J'$ である。$g : I \longrightarrow J'$ は全射なので $x \in I$ で $g(x) = -y$ となるものが存在する。このとき

$$f(x) = -g(x) = -(-y) = y$$

となるので f は全射である。

演習問題 4.9　命題 4.10 を数学的帰納法で証明せよ。

最初に $a^{m+n}=a^m a^n$ を n に関する数学的帰納法で証明する。命題 $P(k)$ を

$$\forall m\in\mathbb{N}\quad a^{m+k}=a^m a^k$$

とする。$a^1=a$ であることを注意しておく。

$$\begin{aligned} a^{m+1} &= a^m\cdot a && (\text{定義}) \\ &= a^m\,a^1 && (\text{定義}) \end{aligned}$$

より $P(1)$ は成立している。$P(k)$ の成立を仮定する。即ち $a^{m+k}=a^m a^k$ を仮定する。

$$\begin{aligned} a^{m+(k+1)} &= a^{(m+k)+1} && (\text{結合法則}) \\ &= a^{m+k}a && (\text{定義}) \\ &= \left(a^m a^k\right)a && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= a^m\left(a^k a\right) && (\text{結合法則}) \\ &= a^m a^{k+1} && (\text{定義}) \end{aligned}$$

となり $P(k+1)$ も成立している。よって示された。

次は $(a^m)^n=a^{mn}$ を示す。命題 $Q(k)$ を

$$\forall m\in\mathbb{N}\quad (a^m)^k=a^{mk}$$

とする。$a^m a^n=a^{m+n}$ は今証明したので使用してもよいことを注意しておく。$n=1$ のときは

$$\begin{aligned} (a^m)^1 &= a^m && (\text{定義}) \\ &= a^{m\cdot 1} && (m=m\cdot 1) \end{aligned}$$

より $Q(1)$ は成立する。

$Q(k)$ の成立を仮定する。即ち $(a^m)^k=a^{mk}$ を仮定する。

$$\begin{aligned} (a^m)^{k+1} &= (a^m)^k\,a^m && (\text{定義}) \\ &= a^{mk}a^m && (\text{帰納法の仮定}) \\ &= a^{mk+m} && (\text{指数法則}) \\ &= a^{m(k+1)} && (\text{分配法則}) \end{aligned}$$

となり $Q(k+1)$ も成立している。よって示された。

演習問題 4.10　命題 4.12 を証明せよ。ただし自然数に対し指数法則が成立すること (命題 4.10) は用いてよい。**ヒント：** 最初に任意の整数 n に対し $a^n\cdot a=a^{n+1}, a^n\cdot\left(a^{-1}\right)=a^{n-1}$ が成立することを示せ。それを用いて n が正の場合と負の場合に分け帰納法で示せ。

最初に任意の整数 n に対し

$$a^{n+1}=a^n\cdot a$$

が成立することを示す。

n が自然数のときは定義そのものである。$n=0$ のとき，

$$a^{0+1}=a^1=a=1\cdot a=a^0\cdot a$$

で成立している。$n=-1$ のとき

$$a^{-1+1}=a^0=1=a^{-1}\cdot a$$

より成立する。

残った $n<-1$ の場合考える。$n=-p$ とおくと p および $p-1$ は自然数である。

$$\begin{aligned}a^{n+1}&=a^{-p+1}=a^{-(p-1)}=\left(a^{-1}\right)^{p-1}=\left(a^{-1}\right)^{p-1}\cdot 1=\left(a^{-1}\right)^{p-1}\cdot\left(\left(a^{-1}\right)\cdot a\right)\\&=\left(\left(a^{-1}\right)^{p-1}\cdot a^{-1}\right)\cdot a=\left(a^{-1}\right)^{p}\cdot a=a^{-p}\cdot a=a^n\cdot a\end{aligned}$$

よってすべての整数 n に対し成立する。

証明した式は任意の整数に対して成立するので，$n-1$ とすると

$$a^n=a^{n-1}\cdot a$$

が成立する。両辺に a^{-1} をかけると

$$a^n\cdot\left(a^{-1}\right)=a^{n-1}$$

を得る。

$a^{m+n}=a^m\cdot a^n$ の証明を始める。m は任意の整数とする。最初は $n\geq 0$ の場合。

$n=0$ のときは

$$a^{m+0}=a^m=a^m\cdot 1=a^m\cdot a^0$$

より成立している。

$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち任意の整数 m に対し $a^{m+k}=a^m a^k$ の成立を仮定する。

$$\begin{aligned}a^{m+(k+1)}&=a^{(m+k)+1}=a^{m+k}\cdot a=\left(a^m a^k\right)a^1\\&=a^m\left(a^k a^1\right)=a^m a^{k+1}\end{aligned}$$

よって $n=k+1$ の場合も成立している。数学的帰納法により $n\geq 0$ の場合 $a^{m+n}=a^m a^n$ が成立する。

n が負の場合は $n=-p$ とおき，p に関する数学的帰納法で示す。$p=0$ のときは成立している。$n=-p$ のとき成立を仮定する。即ち $a^{m-p}=a^m\cdot a^{-p}$ の成立を仮定する。$n-1=-(p+1)$ のとき

$$\begin{aligned}a^{m+(-(p+1))}&=a^{(m-p)-1}=a^{m-p}\cdot a^{-1}=\left(a^m\cdot a^{-p}\right)\cdot a^{-1}\\&=a^m\cdot\left(a^{-p}\cdot a^{-1}\right)=a^m\cdot\left(\left(a^{-1}\right)^p\cdot\left(a^{-1}\right)\right)\\&=a^m\cdot\left(\left(a^{-1}\right)^{p+1}\right)=a^m\cdot a^{-(p+1)}\end{aligned}$$

よって数学的帰納法によりすべての負の整数 n で $a^{m+n}=a^m a^n$ が成立することが分かる。
前の結果とあわせるとすべての整数 m,n に対し $a^{m+n}=a^m a^n$ が成立することが示された。

$(a^m)^n = a^{mn}$ を証明する。m は任意の整数とする。$a^m a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1$ より $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}=(a^m)^{-1}$ が成立する。
最初は $n\geq 0$ のとき。$(a^m)^0=1=a^0=a^{m0}$ より $n=0$ のとき成立している。$n=k$ のとき成立を仮定する。即ち $(a^m)^k=a^{mk}$ の成立を仮定する。

$$(a^m)^{k+1}=(a^m)^k(a^m)=\left(a^{mk}\right)a^m=a^{mk+m}=a^{m(k+1)}$$

途中 $a^{a+q}=a^p a^q$ を使用した。$n=k+1$ でも成立するので数学的帰納法によりすべての 0 以上の整数で成立する。
$n=-p$ で成立を仮定する。

$$\begin{aligned}(a^m)^{-(p+1)}&=(a^m)^{-p-1}=(a^m)^{-p}(a^m)^{-1}=\left(a^{-mp}\right)a^{-m}\\&=a^{-mp-m}=a^{m(-(p+1))}\end{aligned}$$

よって $p+1$ でも成立し証明が完成する。

演習問題 ***4.11**　命題 4.13 を証明せよ。

(1) を証明し，それを用いて (2) を証明する。
$a>1$ とする。$a=1+h$ とおくと $h>0$ である。二項定理より自然数 n に対し

$$a^n=(1+h)^n=1+nh+{}_nC_{n-1}h^2+\cdot+{}_nC_kh^k+\cdots+h^n$$

が成立している。上式右辺の 3 項以降は正なので

$$(1+h)^n>1+nh$$

が成立する。よって

$$\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$$

が成立するが，$a^n>1+nh$ より $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=\infty$ が得られる。
$n<0$ のとき $n=-m$ とおくと

$$a^n=a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

となる。$a^m>1+mh$ より $\dfrac{1}{a^m}<\dfrac{1}{1+mh}$ が成立している。

$$0<a^n=\frac{1}{a^m}<\frac{1}{1+mh}$$

であり，$n\to-\infty$ のとき $m\to\infty$ となる。$\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{1}{1+mh}=0$ より

$$\lim_{n\to-\infty}a^n=0$$

が得られる。

$0<a<1$ のとき $b=\dfrac{1}{a}$ とおくと $b>1$ である。すでに示したことから

$$\lim_{n\to\infty} b^n=\infty, \qquad \lim_{n\to-\infty} b^n=0$$

が成立する。$a^n=\dfrac{1}{b^n}$ より (1) が得られる。

演習問題 ***4.12**　a は正の実数とする。
(1)　$p,\,q$ が 0 ではない整数の時，$\left(a^{1/q}\right)^p=(a^p)^{1/q}$ を示せ.
(2)　$p,\,q,\,s,\,t$ が 0 ではない整数であって $p/q=s/t$ となっている時，$\left(a^{1/q}\right)^p=\left(a^{1/t}\right)^s$ となることを示せ。
(3)　任意の有理数 $u,\,v$ に対して，次が成り立つことを示せ。

$$a^{u+v}=a^ua^v, \qquad (a^u)^v=a^{uv}$$

(4)　任意の有理数 u に対して $a^u>0$ を示せ。
(5)　$1<a$ の時，有理数 $u,\,v$ が $u<v$ ならば $a^u<a^v$ を示せ。
(6)　$0<a<1$ の時，有理数 $u,\,v$ が $u<v$ ならば $a^u>a^v$ を示せ。

(1)　自然数 n に対し「 $b^n=a \iff b=a^{\frac{1}{n}}$ 」が成立している。ここで最初に 0 でない整数 p に対し「 $b^p=a \iff b=a^{\frac{1}{p}}$ 」の成立を示しておく。$p>0$ の場合は成立しているので $p<0$ とする。$p=-k$ とおくと k は自然数である。$b^p=b^{-k}=\left(\dfrac{1}{b}\right)^k$ なので

$$b^p=a \iff \left(\frac{1}{b}\right)^k=a \iff \frac{1}{b}=a^{\frac{1}{k}} \iff b=\frac{1}{a^{\frac{1}{k}}}=a^{-\frac{1}{k}}=a^{\frac{1}{-k}}=a^{\frac{1}{p}}$$

となり成立する。
$b=a^{\frac{1}{q}}$ とおくと $a=b^q$ が成立している。

$$a^p=\left(b^q\right)^p=b^{qp}=b^{pq}=\left(b^p\right)^q$$

より

$$\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}=b^p=\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$$

が成立している。
(2)　$b=a^{\frac{1}{q}}$，$c=a^{\frac{1}{t}}$ とおくと $a=b^q$，$a=c^t$ が成立している。

$$a^p=\left(b^q\right)^p=b^{qp}=b^{pq}=\left(b^p\right)^q$$

であり，$tp=sq$ より

$$a^p=\left(c^t\right)^p=c^{tp}=c^{sq}=\left(c^s\right)^q$$

が成立している。$\left(b^p\right)^q=\left(c^s\right)^q$ なので (1) より $b^p=c^s$ が成立する。これを a を用いて書き直せば $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p=\left(a^{\frac{1}{t}}\right)^s$ が得られる。
(3)　$u=0$ または $v=0$ の場合は整数のとき示したのと同様に示すことができる。よって u,v は 0 でない有理数とする。(2) は有理数に対し，その分数の表示にかかわらず指数関数が決まることを意味している。即ち $u=\dfrac{p}{q}$ と表示しようと，$u=\dfrac{s}{t}$ と表示しようと，その表示によ

らない値として $a^u = a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{s}{t}}$ が決まることを意味している。よって最初の等式を証明するために分数表示はすでに通分されているとする；即ち $u = \dfrac{p_1}{q}$, $v = \dfrac{p_2}{q}$ (p_1, p_2, q は 0 でない整数) とする。整数が指数の場合の指数法則は示されている。よって

$$\begin{aligned} a^u a^v &= a^{\frac{p_1}{q}} a^{\frac{p_2}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p_1} \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p_2} \\ &= \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p_1+p_2} = a^{\frac{p_1+p_2}{q}} \\ &= a^{\frac{p_1}{q}+\frac{p_2}{q}} = a^{u+v} \end{aligned}$$

となる。

次の式を示すために最初に

$$\left(a^{\frac{1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}} = a^{\frac{1}{q_1 q_2}}$$

を示す。ただし q_1, q_2 は 0 でない整数とする。$b = \left(a^{\frac{1}{q_1}}\right)^{\frac{1}{q_2}}$ とおくと $b^{q_2} = a^{\frac{1}{q_1}}$ である。さらに q_1 乗すると

$$a = (b^{q_2})^{q_1} = b^{q_2 q_1} = b^{q_1 q_2}$$

となるので (1) の最初に注意より $b = a^{\frac{1}{q_1 q_2}}$ となる。

$u = \dfrac{p}{q}$, $v = \dfrac{s}{t}$ とおくと

$$\begin{aligned} (a^u)^v &= \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{s}{t}} = \left(\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)^{\frac{1}{t}}\right)^s \\ &= \left(\left(\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{t}}\right)^p\right)^s = \left(a^{\frac{1}{qt}}\right)^{ps} \\ &= a^{\frac{ps}{qt}} = a^{uv} \end{aligned}$$

が得られる。途中 $(X^p)^{\frac{1}{t}} = \left(x^{\frac{1}{t}}\right)^p$ を使用した。

(4)　有理数 u は $u = \dfrac{p}{q}$ と分数表示できる。ここで q は正の整数，p は整数である。$a > 0$ は常に仮定されているので $a^{\frac{1}{q}} > 0$ である。これを p 乗した $a^u = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$ も正である。

(5)　最初に正の整数 q に対し $a^{\frac{1}{q}} > 1$ を背理法で示す。$a^{\frac{1}{q}} > 0$ なので結論を否定すると

$$0 < a^{\frac{1}{q}} \leq 1$$

が成立している。q は正の整数なので q 乗しても不等号の向きは変わらない。よって

$$0 < \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q \leq 1^q = 1$$

となるのが $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a$ なので $a \leq 1$ となり矛盾。

次に正の有理数 $u = \dfrac{p}{q}$ に対し $a^u > 1$ を示す。ここで p, q は正の整数とする。$a^{\frac{1}{q}} > 1$ なので $a^u = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p > 1$ となり成立する。

$u < v$ とすると $v - u > 0$ なので今示したことより $a^{v-u} > 1$ となるが $a^{v-u} = a^u a^{-v}$ であり両辺に a^u をかけると $a^v > a^u$ が得られる。

(6)　$0 < a < 1$ のとき $b = \dfrac{1}{a}$ とおくと $b > 1$ が成立している。$u < v$ のとき (5) より $b^u < b^v$ が，即ち

$$\left(\frac{1}{a}\right)^u < \left(\frac{1}{a}\right)^v$$

が成立している。両辺に a^{v+u} をかけると

$$a^v < a^u$$

が得られる。