数学序論問題解説 ♯11

演習問題 4.13　系 4.17 を証明せよ。

(1)　命題 4.16 より

$$\log_a\left(p\cdot\frac{1}{p}\right)=\log_a p+\log_a\frac{1}{p}$$

となる。

$$\log_a\left(p\cdot\frac{1}{p}\right)=\log_a 1=0$$

なので移項して $\log_a\dfrac{1}{p}=-\log_a p$ となる。

(2)

$$\log_a\frac{p}{q}=\log_a p\cdot\frac{1}{q}=\log_a p+\log_a\frac{1}{q}=\log_a p-\log_a q$$

演習問題 4.14

(1)　a, b, c を正の実数とする。対数の定義のみを用いて $a^b=c^{b\log_c a}$ を示せ。

(2)　a, b, c を正の実数とする。対数の定義のみを用いて $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$ を示せ。

対数関数においては次が基本的である。

$$y=\log_a x \iff x=a^y$$

(1)　$Y=\log_c a$ とおくと $a=c^Y$ が成立する。即ち $a=c^{\log_c a}$ が成立する。両辺を b 乗すると $a^b=c^{b\log_c a}$ が得られる。

(2)　$X=\log_c a$ とおくと $a=c^X$ が成立し，$Y=\log_c b$ とおくと $b=c^Y$ が成立する。

$$a^{\log_c b}=\left(c^{\log_c a}\right)^{\log_c b}=c^{\log_c a\log_c b}$$

$$b^{\log_c a}=\left(c^{\log_c b}\right)^{\log_c a}=c^{\log_c b\log_c a}$$

よって $a^{log_c b}=b^{\log_c a}$ が成立する。

演習問題 4.15

(1)　次の値を求めよ。

$$\arcsin\frac{1}{2},\quad \arccos\frac{1}{2},\quad \arctan 1,\quad \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \arctan\sqrt{3},\quad \arctan\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2)　次の式を証明せよ。

1) $\arccos\dfrac{4}{5}=\arcsin\dfrac{3}{5}$

2) $\arcsin\dfrac{3}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}=\arcsin\dfrac{56}{65}$

3) $\arccos\dfrac{24}{25}+\arccos\dfrac{12}{13}=\arcsin\dfrac{204}{325}$

4) $4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}=\dfrac{\pi}{4}$

(3)　次の式を簡単にせよ。

1) $\arctan 2+\arctan 3$

2) $\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{12}{13}$

3) $\arctan 3+\arctan 4$

4) $\arcsin\dfrac{2}{3}+\arcsin\dfrac{3}{4}$

(4)　方程式 $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\arctan x$ をみたす x を求めよ。

(5)　$-1\leqq x\leqq 1$ の時，$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(6)　$x>0$ の時，$\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(7)　$\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ を示せ。

逆三角関数においては次が基本的である。

$$
\begin{aligned}
y=\arcsin x &\iff x=\sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leq y\leq\frac{\pi}{2}\right)\\
y=\arccos x &\iff x=\cos y \quad (0\leq y\leq\pi)\\
y=\arctan x &\iff x=\tan y \quad \left(-\frac{\pi}{2}< y<\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

逆三角関数の問題を考えるときには値の範囲のチェックが必要である。y の範囲が分からないときには，$x=\sin y$ から $y=\arcsin x$ は**導かれない**。

(1)　$x=\arcsin\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2}=\sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

なので $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ で $\sin x=\dfrac{1}{2}$ となる x を求めると $x=\dfrac{\pi}{6}$ である。よって $\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$ となる。

$x=\arccos\dfrac{1}{2}$ とおくと

$$\frac{1}{2}=\cos x \quad (0\leq x\leq\pi)$$

なので $x=\dfrac{\pi}{3}$，即ち $\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ となる。

$x=\arctan 1$ とおくと

$$1=\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}< x<\frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x=\dfrac{\pi}{4}$，即ち $\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$ となる。

$x=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x=\dfrac{\pi}{4}$，即ち $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\pi}{4}$ となる。

$x=\arctan\sqrt{3}$ とおくと

$$\sqrt{3}=\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x=\dfrac{\pi}{3}$，即ち $\arctan\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$ となる。

$x=\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan x \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

なので $x=\dfrac{\pi}{6}$，即ち $\arctan\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\pi}{6}$ となる。

(2)

1)　$\arccos\dfrac{4}{5}=\alpha$ とおくと

$$\arccos\frac{4}{5}=\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \cos\alpha=\frac{4}{5}\ \ (0\leq\alpha\leq\pi)$$

である。ここで $\cos\alpha\geq 0$ より $\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}$ が成立する。

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

となるが $\sin\alpha\geq 0$ より $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ となる。ここからいきなり $\alpha=\arcsin\dfrac{3}{5}$ としないように !! α の範囲のチェックを必ずすること。 $-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}$ なので $\alpha=\arcsin\dfrac{3}{5}$ となる。

よって

$$\arccos\frac{4}{5}=\alpha=\arcsin\frac{3}{5}$$

となる。

2)　$\alpha=\arcsin\dfrac{3}{5}$ とおくと

$$\sin\alpha=\frac{3}{5} \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

が成立している。$\beta=\arcsin\dfrac{5}{13}$ とおくと

$$\sin\beta=\frac{5}{13} \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leq\beta\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

が成立している。ここで $\dfrac{3}{5},\dfrac{5}{13}$ は共に正なので

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\qquad 0<\beta<\frac{\pi}{2}$$

が成立していることを注意しておく。このとき $\cos\alpha, \cos\beta$ ともに正なので

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$
$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

が成立する。従って

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{3}{5}\frac{12}{13} + \frac{4}{5}\frac{5}{13} = \frac{56}{65}$$

が成立する。ここからいきなり $\alpha+\beta = \arcsin\frac{56}{65}$ としないように !! $\alpha+\beta$ の範囲のチェックを必ずすること。 最初の注意より $0 < \alpha+\beta < \pi$ が成立する。$\alpha+\beta = \arcsin\frac{56}{65}$ を示すためには $-\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$ が必要である。$\cos(\alpha+\beta) \geq 0$ が成立していればそれが分かる。

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{4}{5}\frac{12}{13} - \frac{3}{5}\frac{5}{13} = \frac{33}{65} > 0$$

よって

$$\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13} = \arcsin\frac{56}{65}$$

が成立する。

範囲のチェックで，α, β をもう少し詳しく見ることで $\cos(\alpha+\beta)$ を計算しなくても求めることができる。範囲のチェックの部分は次のように行う。$\sin(\alpha+\beta)$ の計算は前と同様。

$$0 < \sin\alpha = \frac{3}{5} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0 < \sin\beta = \frac{5}{13} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$$

よって $0 < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2}$

3) $\alpha = \arccos\frac{24}{25}, \quad \beta = \arccos\frac{12}{13}$ とおくと

$$\cos\alpha = \frac{24}{25}\ (0 \leq \alpha \leq \pi), \qquad \cos\beta = \frac{12}{13}\ (0 \leq \beta \leq \pi)$$

が成立している。$\cos\alpha \geq 0, \cos\beta \geq 0$ より $\alpha \leq \frac{\pi}{2}, \beta \leq \frac{\pi}{2}$ である。よって $\sin\alpha \geq 0, \sin\beta \geq 0$ が成立している。

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\left(\frac{24}{25}\right)^2 = \left(\frac{7}{25}\right)^2$$
$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\left(\frac{12}{13}\right)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

より $\sin\alpha = \dfrac{7}{25}, \sin\beta = \dfrac{5}{13}$ である。

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{7}{25}\frac{12}{13} + \frac{24}{25}\frac{5}{13} \\ &= \frac{204}{325}\end{aligned}$$

ここからいきなり $\alpha+\beta = \arcsin\dfrac{204}{325}$ としないように !! $\alpha+\beta$ の範囲のチェックを必ずすること。 $0 \leq \alpha+\beta \leq \pi$ となるが

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{24}{25}\frac{12}{13} - \frac{7}{25}\frac{5}{13} \\ &= \frac{253}{325} \geq 0\end{aligned}$$

より $\alpha+\beta \leq \dfrac{\pi}{2}$ である。よって

$$\alpha+\beta = \arcsin\frac{204}{325}$$

である。

4) $\alpha = \arctan\dfrac{1}{5}$ とおくと $\tan\alpha = \dfrac{1}{5}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるが， $0 < \tan\alpha < 1$ より $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ である。

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\frac{1}{5}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12} \quad \left(0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan 4\alpha = \frac{2\tan 2\alpha}{1-\tan^2 2\alpha} = \frac{2\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119} \quad (0 < 4\alpha < \pi)$$

$$\tan\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\alpha - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\alpha\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239} \quad \left(-\frac{\pi}{4} < 4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}\right)$$

ここからいきなり $4\alpha - \dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{239}$ としないように !! $4\alpha - \dfrac{\pi}{4}$ の範囲のチェックを必ずすること。

ここで $0 < \tan\left(4\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$ より $4\alpha - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{2}$ である。よって

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{239}$$

となり式が得られる。

(3)

1) $\arctan 2 = \alpha, \arctan 3 = \beta$ とおくと

$$\tan\alpha = 2 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right), \qquad \tan\beta = 3 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$$

である。$\tan\alpha > 0, \tan\beta > 0$ より $\alpha > 0, \beta > 0$ である。また $\alpha+\beta < \pi$ である。

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{2+3}{1-2\cdot 3} = -1$$

と $0 < \alpha+\beta < \pi$ より $\alpha+\beta = \dfrac{3\pi}{4}$ となるので

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$$

2) $\arcsin\dfrac{5}{13} = \alpha, \arcsin\dfrac{12}{13} = \beta$ とおくと

$$\sin\alpha = \frac{5}{13} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right), \qquad \sin\beta = \frac{12}{13} \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$\sin\alpha > 0, \sin\beta > 0$ より $0 < \alpha, 0 < \beta$ である。また $\alpha+\beta \leq \pi$ である。

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2$$
$$\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

と $\cos\alpha \geq 0, \cos\beta \geq 0$ より $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}, \cos\beta = \dfrac{5}{13}$ である。

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{5}{13}\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\frac{12}{13} = 1$$

となるが $0 \leq \alpha+\beta \leq \pi$ より $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{2}$ である。よって

$$\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$$

3) $\alpha = \arctan 3, \beta = \arctan 4$ とおくと

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$$

であるが,

$$\tan\alpha = 3 > 0, \qquad \tan\beta = 4 > 0$$

より

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

である。よって

$$0 < \alpha+\beta < \pi$$

である。

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{3+4}{1-3\cdot 4} = -\frac{7}{11} < 0$$

$\tan(\alpha+\beta) < 0$ より $\dfrac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \pi$ となる。よって

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta-\pi < 0 < \frac{\pi}{2}$$

と $\tan(\alpha+\beta-\pi)=\tan(\alpha+\beta)=-\dfrac{7}{11}$ より

$$\arctan\left(-\frac{7}{11}\right)=\alpha+\beta-\pi$$

以上により

$$\arctan 3+\arctan 4=\alpha+\beta=\arctan\left(-\frac{7}{11}\right)+\pi$$

4) $\alpha=\arcsin\dfrac{2}{3}, \beta=\arcsin\dfrac{3}{4}$ とおくと

$$-\frac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{2}\leq\beta\leq\frac{\pi}{2}$$

であるが，$\sin\alpha=\dfrac{2}{3}>0, \sin\beta=\dfrac{3}{4}>0$ より

$$0<\alpha\leq\frac{\pi}{2},\quad 0<\beta\leq\frac{\pi}{2}$$

である。

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$
$$\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{4^2}$$

より

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3},\quad \cos\beta=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

である。

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}\frac{\sqrt{7}}{4}+\frac{\sqrt{5}}{3}\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{7}}{6}+\frac{\sqrt{5}}{4}$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{3}\frac{\sqrt{7}}{4}-\frac{2}{3}\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{35}-6}{12}$$

$\left(\sqrt{35}\right)^2=35<36=6^2$ より $\cos(\alpha+\beta)<0$ である。このことと $0<\alpha+\beta<\pi$ より $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$ が成立している。

$X=\pi-(\alpha+\beta)$ とおくと $0\leq X\leq\dfrac{\pi}{2}$ であり，

$$\sin X=\sin\left(\pi-(\alpha+\beta)\right)=\sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{7}}{6}+\frac{\sqrt{5}}{4}$$

より

$$X=\arcsin\left(\frac{\sqrt{7}}{6}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$$

となる。よって

$$\arcsin\frac{2}{3}+\arcsin\frac{3}{4}=\alpha+\beta=\pi-X=\pi-\arcsin\left(\frac{\sqrt{7}}{6}+\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$$

(4)　$y=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ とおくと

$$\cos y=\frac{1}{\sqrt{5}}\qquad(0\leq y\leq\pi)$$

である。また $y=\arctan x$ より

$$\tan y=x$$

なので,

$$\sin y=\tan y\cos y=\frac{x}{\sqrt{5}}$$

となる。$\cos^2 y+\sin^2 y=1$ に代入すると $1=\dfrac{1}{5}+\dfrac{x^2}{5}$ より $x^2=4$ を得る。

$$\arctan x=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}>0$$

より $x>0$ なので $x=2$ が解である。

(5)　$\alpha=\arcsin x$ とおくと $x=\sin\alpha$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ であり，$\beta=\arccos x$ とおくと $x=\cos\beta$ $(0\leq\beta\leq\pi)$ である。

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\sin\left(-\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\sin\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-\big(-\cos\beta\big)=\cos\beta$$

$0\leq\beta\leq\pi$ のとき $-\dfrac{\pi}{2}\leq\dfrac{\pi}{2}-\beta\leq\dfrac{\pi}{2}$ であり,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta=x=\sin\alpha$$

なので $\dfrac{\pi}{2}-\beta=\alpha$ となり，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(6)　$\alpha=\arctan x$ とおくと $x=\tan\alpha$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。$x>0$ より $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ となっている。$\beta=\arctan\dfrac{1}{x}$ とおくと $\dfrac{1}{x}=\tan\beta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<v<\dfrac{\pi}{2}\right)$ である。$\dfrac{1}{x}>0$ より $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ となっている。

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\left(-\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\cos\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\beta$$

これより

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)}=\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{1}{\tan\beta}=x=\tan\alpha$$

が成立する。α,β ともに $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ なので $0<\dfrac{\pi}{2}-\beta<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\dfrac{\pi}{2}-\beta=\alpha$ が成立する。

(7)　$\alpha=\arctan x$ とおくと $x=\tan\alpha$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ であり，$\beta=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\sin\beta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq\beta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ となる。

$$1+x^2=1+\tan^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

であるが，$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\alpha > 0$ なので $\sqrt{1+x^2} = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ となる。

$$\sin\beta = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \cos\alpha\tan\alpha = \sin\alpha$$

であり，$-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2} \leq \beta \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\alpha = \beta$ となる。