

数学序論問題解説 #13

演習問題 5.14 $x = a$ で微分可能な関数は $x = a$ において連続であることを証明せよ。

関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能であるとすると,

$$\varepsilon(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)$$

とおくとき $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立している。このとき

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h$$

なので $x = a+h$ とおくと

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \{f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h\} = f(a)$$

となるので $f(x)$ は $x = a$ で連続である。

演習問題 5.15 定義に基づいて次の関数の導関数を求めよ。

(1) $f(x) = x$

(2) $f(x) = x^3$

(3) $f(x) = x^2 + x + 1$

(4) $f(x) = a$

(5) $f(x) = x^4$

(6) $f(x) = \frac{1}{x}$

(7) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

(8) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

(1)

$$(x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

(2)

$$\begin{aligned} (x^3)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \{3x^2 + 3xh + h^2\} = 3x^2 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) + 1 - (x^2 + x + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \{2x + h + 1\} = 2x + 1 \end{aligned}$$

(4)

$$(a)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a - a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

(5)

$$\begin{aligned}(x^4)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \{4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3\} \\ &= 4x^3\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{x - (x+h)}{(x+h)x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{(x+h)x} \\ &= -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

(7) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ なので「無理化」するためには分母, 分子に $(\sqrt[3]{x+h})^2 + \sqrt[3]{x+h}\sqrt[3]{x} + (\sqrt[3]{x})^2$ をかける必要がある。

$$\begin{aligned}(\sqrt[3]{x})' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}) \left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2} \right)}{h \left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2} \right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+h})^3 - (\sqrt[3]{x})^3}{h \left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2} \right)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h \left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2} \right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{(x+h)^2} + \sqrt[3]{(x+h)x} + \sqrt[3]{x^2} \right)} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\end{aligned}$$

(8) $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)$ なので「無理化」のためには分母, 分子に $(\sqrt[4]{x+h} + \sqrt[4]{x}) \left(\sqrt[4]{(x+h)^2} + \sqrt[4]{x^2} \right)$ をかける必要がある。

$$\begin{aligned}(\sqrt[4]{x})' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x+h} - \sqrt[4]{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[4]{x+h} - \sqrt[4]{x}) \left(\sqrt[4]{x+h} + \sqrt[4]{x} \right) \left(\sqrt[4]{(x+h)^2} + \sqrt[4]{x^2} \right)}{h \left(\sqrt[4]{x+h} + \sqrt[4]{x} \right) \left(\sqrt[4]{(x+h)^2} + \sqrt[4]{x^2} \right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[4]{x+h})^4 - (\sqrt[4]{x})^4}{h \left(\sqrt[4]{x+h} + \sqrt[4]{x} \right) \left(\sqrt[4]{(x+h)^2} + \sqrt[4]{x^2} \right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h \left(\sqrt[4]{x+h} + \sqrt[4]{x} \right) \left(\sqrt[4]{(x+h)^2} + \sqrt[4]{x^2} \right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\sqrt[4]{x+h} + \sqrt[4]{x} \right) \left(\sqrt[4]{(x+h)^2} + \sqrt[4]{x^2} \right)} \\ &= \frac{1}{(2\sqrt[4]{x})(2\sqrt[4]{x^2})} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}\end{aligned}$$

演習問題 *5.16 上の定理 5.14 の証明のどこが不十分か指摘し, 定理の証明を完成させよ。

定理の証明では $f(a+h) - f(a)$ で割り算をしているが、 $f(a+h) - f(a) = 0$ になる場合は 0 での割り算になってしまう。

証明を完成させる方法としては、 $f(a+h) - f(a)$ が 0 になる場合とならない場合に分ける方法もあるがここでは一括して証明することを考える。

そのために次が成立することを注意しておく：「ある $q(x)$ と $\varepsilon(x)$ に対し

$$f(x+h) - f(x) = q(x)h + \varepsilon(h)h$$

が成立するとき、 $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立すれば $f(x)$ は微分可能であり、 $f'(x) = q(x)$ が成立する。逆に $f(x)$ が微分可能のとき $\varepsilon(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$ とおくと、

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \varepsilon(h)h$$

であり、 $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ が成立する。」

$y = f(x), z = g(y)$ は微分可能なので

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + \varepsilon_1(h)h$$

$$g(y+k) - g(y) = g'(y)k + \varepsilon_2(k)k$$

としたとき $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$ 、 $\lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon_2(k) = 0$ が成立している。 $f(x+h) - f(x) = k$ とおくと $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$ である。

$$\begin{aligned} g \circ f(x+h) - g \circ f(x) &= g(f(x+h)) - g(f(x)) \\ &= g(f(x) + k) - g(f(x)) \\ &= g'(y)k + \varepsilon_2(k)k \\ &= g'(y)(f(x+h) - f(x)) + \varepsilon_2(k)(f(x+h) - f(x)) \\ &= g'(y)(f'(x)h + \varepsilon_1(h)h) + \varepsilon_2(k)(f'(x)h + \varepsilon_1(h)h) \\ &= g'(y)f'(x)h + (g'(y)\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(k)f'(x) + \varepsilon_2(k)\varepsilon_1(h))h \end{aligned}$$

$\varepsilon(h) = g'(y)\varepsilon_1(h) + \varepsilon_2(k)f'(x) + \varepsilon_2(k)\varepsilon_1(h)$ とおくと

$$g \circ f(x+h) - g \circ f(x) = g'(y)f'(x)h + \varepsilon(h)h$$

となり、 $h \rightarrow 0$ のとき $\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$ 、 $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_1(h) = 0$ 、 $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_2(k) = 0$ となるので

$$\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

となる。最初の注意より $g \circ f(x)$ は微分可能で、導関数は $g'(y)f'(x)$ となる。よって

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

が成立する。

演習問題 5.17 定理 5.14 の成立を仮定して定理 5.15 を証明せよ。

定理の条件から，すでに示してあるように終域を適当に定めれば f は全単射であることが分かる。よって f の逆写像 f^{-1} が存在する。

f と f^{-1} を合成した関数は恒等写像である。即ち $f^{-1} \circ f(x) = x$ となる。 $\frac{dx}{dx} = 1$ なので，定理 5.14 を適用すると，

$$1 = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dx}$$

となる。これより

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

を得る。

演習問題 5.18 任意の自然数 n に対して $(x^n)' = nx^{n-1}$ が成立する事を数学的帰納法で示せ。

$n = 1$ のとき場合を考える。

$$(x^1)' = x' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1 = 1x^0 = 1x^{1-1}$$

よって $n = 1$ のとき成立している。

$n = k$ のとき成立を仮定する。即ち $(x^k)' = kx^{k-1}$ の成立を仮定する。積の微分法を用いると

$$\begin{aligned} (x^{k+1})' &= (x^k \cdot x)' = (x^k)'x + x^k x' \\ &= kx^{k-1}x + x^k \cdot 1 = kx^k + x^k \\ &= (k+1)x^{k+1-1} \end{aligned}$$

よって $n = k + 1$ のときの成立が示された。数学的帰納法によりすべての n で成立する。

演習問題 5.19 演習問題 5.18 は数学的帰納法で求めたが，使わない方法もある。2項定理

$((x+h)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^{n-k} h^k)$ を用いて $(x^n)' = nx^{n-1}$ を数学的帰納法を用いず証明せよ。

$$\Delta = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{\sum_{k=0}^n {}_n C_k x^{n-k} h^k - x^n}{h} = \frac{x^n + {}_n C_1 x^{n-1} h + \sum_{k=2}^n {}_n C_k x^{n-k} h^k - x^n}{h} \\ &= nx^{n-1} + \sum_{k=2}^n {}_n C_k x^{n-k} h^{k-1} \end{aligned}$$

よって

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \Delta = nx^{n-1}$$

演習問題 5.20 次の有理関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \frac{x-1}{x+1}$

(2) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

(3) $y = \frac{1}{x^2+1}$

(1)

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x-1}{x+1} \right)' = (x-1)' \left(\frac{1}{x+1} \right) + (x-1) \left(\frac{1}{x+1} \right)' \\ &= \frac{1}{x+1} + (x-1) \left(\frac{-1}{(x+1)^2} \right) = \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

(2) (1) と同様に解いてもよいし, $y = \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$ と変形して

$$y' = \left(1 + \frac{2}{x^2-1} \right)' = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

という計算法もある。

(3)

$$y' = \left(\frac{1}{x^2+1} \right)' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

演習問題 5.21 次の関数の導関数を定義に基づいて求めよ。ただし次の極限值は用いてよい。

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

(1) $y = x^3$

(2) $y = \frac{x+1}{x^2+1}$

(3) $y = \sqrt{x^2+1}$

(4) $y = \cos 2x$

(5) $y = 2^{x^2}$

(6) $y = \log x$

(7) $y = \sin(x^2)$

(8) $y = \log_a x$

(9) $y = \arctan(x^2)$

(10) $y = \arcsin(1-x)$

(1)

$$\begin{aligned} (x^3)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x+h+1}{(x+h)^2+1}\right) - \left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{(x+h+1)(x^2+1) - (x+1)((x+h)^2+1)}{((x+h)^2+1)(x^2+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-x^2-2x+1-xh-h)}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-x^2-2x+1-xh-h}{((x+h)^2+1)(x^2+1)} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x^2+1}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2+1} - \sqrt{x^2+1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{(x+h)^2+1} - \sqrt{x^2+1}\right) \left(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}\right)}{h \left(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2+1 - (x^2+1)}{h \left(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h \left(\sqrt{(x+h)^2+1} + \sqrt{x^2+1}\right)} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(\cos 2x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2(x+h) - \cos 2x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cos 2h - \sin 2x \sin 2h - \cos 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \cos 2x \frac{\cos 2h - 1}{h} - \sin 2x \frac{\sin 2h}{h} \right\} \\ &= \cos 2x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2h - 1}{h} - \sin 2x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{h}\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\frac{\cos 2h - 1}{h} = \frac{(\cos 2h - 1)(\cos 2h + 1)}{h(\cos 2h + 1)} = \frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h + 1)}$$

なので

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos 2h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 2h}{h(\cos 2h + 1)} \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2h}{2h} \frac{\sin 2h}{\cos 2h + 1} \\ &= -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{\cos 2h + 1} \\ &= -2 \cdot 1 \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

であり,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2h}{2h} = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h}{2h} = 2 \cdot 1 = 2$$

なので

$$(\cos 2x)' = -2 \sin 2x$$

となる。

(5) $2 = e^k$ とおくと $\log 2 = \log e^k = k$ である。

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{2^{(x+h)^2} - 2^{x^2}}{h} = \frac{(e^k)^{(x+h)^2} - (e^k)^{x^2}}{h} = \frac{e^{kx^2+2kxh+kh^2} - e^{kx^2}}{h} \\ &= \frac{e^{kx^2}(e^{kh(2x+h)} - 1)}{h} = \frac{e^{kx^2}(e^{kh(2x+h)} - 1)}{kh(2x+h)} k(2x+h)\end{aligned}$$

ここで $H = kh(2x+h)$ とおくと, $h \rightarrow 0$ のとき $H \rightarrow 0$ であり,

$$\Delta = \frac{e^H - 1}{H} e^{kx^2} k(2x+h)$$

である。よって

$$\begin{aligned}(2^{x^2})' &= \lim_{h \rightarrow 0} \Delta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^H - 1}{H} e^{kx^2} k(2x+h) = e^{kx^2} k(2x) \\ &= 2x \log 2 (e^k)^{x^2} = 2x \log 2 \cdot 2^{x^2}\end{aligned}$$

(6)

$$(\log x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

であるが, ここで $k = \log(x+h) - \log x$ とおくと $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ となる。

$$\log(x+h) - \log x = \log \frac{x+h}{x}$$

なので $\log \frac{x+h}{x} = k$ より $e^k = \frac{x+h}{x}$ を得る。これを h について解くと

$$h = x(e^k - 1)$$

となる。これを代入して次を得る。

$$\begin{aligned}(\log x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{x(e^k - 1)} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{e^k - 1} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

(7) $f(x) = \sin(x^2)$ とする。 $u = 2xh + h^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h)^2 - \sin(x^2)}{h} = \frac{\sin(x^2 + 2xh + h^2) - \sin(x^2)}{h} \\ &= \frac{\sin(x^2 + u) - \sin(x^2)}{h} = \frac{\sin(x^2 + u) - \sin(x^2)}{u} \frac{u}{h}\end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$ のとき $u \rightarrow 0$ であり

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + u) - \sin(x^2)}{u} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) \cos u + \cos(x^2) \sin u - \sin(x^2)}{u} \\ &= \sin(x^2) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u - 1}{u} + \cos(x^2) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u}\end{aligned}$$

ここで (4) で示した $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u - 1}{u} = 0$ を用いると

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \cos(x^2) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u}{h} = 2x \cos(x^2)$$

(8) $f(x) = \log_a x$ とする。 $y = \log_a x$ より $x = a^y$ である。 $k = \log_a(x+h) - \log_a x$ とおくと

$$x+h = a^{\log_a(x+h)} = a^{\log_a x + k} = a^{\log_a x} a^k = x a^k$$

より

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k}{h} = \frac{k}{x a^k - x} = \frac{1}{x} \frac{k}{a^k - 1}$$

$b = \log a$ とおくと $a = e^b$ より

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{a^k - 1} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{(e^b)^k - 1} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{bk}{e^{bk} - 1} \frac{1}{b} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\log a}$$

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{x \log a}$$

(9) $f(x) = \arctan(x^2)$ とする。 $u = 2xh + h^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\arctan(x+h)^2 - \arctan(x^2)}{h} = \frac{\arctan(x^2 + 2xh + h^2) - \arctan(x^2)}{h} \\ &= \frac{\arctan(x^2 + u) - \arctan(x^2)}{h} = \frac{\arctan(x^2 + u) - \arctan(x^2)}{u} \frac{u}{h}\end{aligned}$$

$y = \arctan(x^2)$, $k = \arctan(x^2 + u) - \arctan(x^2)$ とおくと $x^2 = \tan y$, $x^2 + u = \tan(y+k)$ である。

$$\frac{\arctan(x^2 + u) - \arctan(x^2)}{u} = \frac{y+k-y}{u} = \frac{k}{x^2 + u - x^2} = \frac{k}{\tan(y+k) - \tan y}$$

$h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ であり, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u}{h} = 2x$ である。

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan(y+k) - \tan y}{k} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \left(\frac{\sin(y+k)}{\cos(y+k)} - \frac{\sin y}{\cos y} \right) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \frac{\sin(y+k) \cos y - \sin y \cos(y+k)}{\cos(y+k) \cos y} \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \frac{\sin(y+k-y)}{\cos(y+k) \cos y} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin k}{k} \frac{1}{\cos(y+k) \cos y} \\ &= \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^4\end{aligned}$$

よって

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2x}{1+x^4}$$

(10) $\arcsin(1-x) = y$ とおくと $1-x = \sin y$ となり, $\arcsin(1-(x+h)) = y+k$ とおくと $1-(x+h) = \sin(y+k)$ となる。またこのとき $h = \sin y - \sin(y+k)$ となる。

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\arcsin(1-(x+h)) - \arcsin(1-x)}{h} = \frac{k}{\sin y - \sin(y+k)} \\ &= \frac{k}{2 \cos\left(\frac{y+k+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y+k-y}{2}\right)} = \frac{k}{-2 \cos\left(\frac{2y+k}{2}\right) \sin\left(\frac{k}{2}\right)} \end{aligned}$$

$h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ なので

$$\begin{aligned} (\arcsin(1-x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \Delta = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{-2 \cos\left(\frac{2y+k}{2}\right) \sin\left(\frac{k}{2}\right)} \\ &= - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\cos\left(\frac{2y+k}{2}\right)} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{k}{2}}{\sin\left(\frac{k}{2}\right)} \\ &= - \frac{1}{\cos y} \end{aligned}$$

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ より

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - (1-x)^2} = \sqrt{2x - x^2}$$

よって

$$(\arcsin(1-x))' = - \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$$

演習問題 5.22 次の関数の導関数を求めよ (諸公式を用いてよい)。

- | | |
|------------------------------|----------------------------|
| (1) $y = x^2 + 3x + 2$ | (2) $y = 3 \sin x + 2e^x$ |
| (3) $y = xe^x$ | (4) $y = \sin^{100} 2x$ |
| (5) $y = x^3 \log(2x^3 + x)$ | (6) $y = \arcsin(x^2 + 1)$ |
| (7) $y = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$ | (8) $y = \sin(3x + 1)$ |
| (9) $y = e^x \sin x$ | (10) $y = x \arctan x$ |

(1)

$$(x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3$$

(2)

$$(3 \sin x + 2e^x)' = 3 \cos x + 2e^x$$

(3)

$$(xe^x)' = e^x + xe^x$$

(4)

$$(\sin^{100} 2x)' = 200 \sin^{99} 2x \cdot \cos 2x$$

(5)

$$(x^3 \log(2x^3 + x))' = 3x^2 \log(2x^3 + x) + x^3 \frac{6x^2 + 1}{2x^3 + x}$$

(6)

$$(\arcsin(x^2 + 1))' = \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + 1)^2}}$$

(7)

$$\begin{aligned} ((x^2 + 2)(x^2 + 3))' &= (x^2 + 2)'(x^2 + 3) + (x^2 + 2)(x^2 + 3)' \\ &= 2x(x^2 + 3) + 2x(x^2 + 2) = 2x(2x^2 + 5) \end{aligned}$$

(8)

$$(\sin(3x + 1))' = 3 \cos(3x + 1)$$

(9)

$$(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x$$

(10)

$$\begin{aligned} (x \arctan x)' &= (x)' \arctan x + x (\arctan x)' \\ &= \arctan x + \frac{x}{1 + x^2} \end{aligned}$$

演習問題 5.23 次を示せ。

$$y = \log |x| \quad (x \neq 0) \quad \text{とおくと} \quad y' = \frac{1}{x}$$

$x > 0$ のときはすでに示したように

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

が成立する。

$x < 0$ のとき, $|x| = -x$ なので, $u = -x$ とおき合成関数の微分法を用いる。

$$\begin{aligned} (\log |x|)' &= \frac{d \log(-x)}{dx} = \frac{d \log u}{du} \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{u} (-1) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

いずれの場合も

$$(\log |x|)' = \frac{1}{x}$$

が成立する。

演習問題 5.24 対数微分法を用いて次の微分をもとめよ。

$$(1) x^{\sin x} \qquad (2) \sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}}$$

(1) $y = x^{\sin x}$ の両辺の対数を取ると, $\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \log x$ である。この両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \cos x \log x + \sin x \frac{1}{x}$$

なので

$$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x} \left(\cos x \log x + \sin x \frac{1}{x} \right)$$

が得られる。

(2) $y = \sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}}$ の両辺の対数を取ると,

$$\begin{aligned} \log y &= \log \sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}} = \log \left(\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3} = \frac{1}{2} \{ \log(x^2+2)^2 - \log(x^2+3)^3 \} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \log(x^2+2) - \frac{1}{2} \cdot 3 \log(x^2+3) = \log(x^2+2) - \frac{3}{2} \log(x^2+3) \end{aligned}$$

である。この両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+2} - \frac{3}{2} \frac{2x}{x^2+3}$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \sqrt{\frac{(x^2+2)^2}{(x^2+3)^3}} \left(\frac{2x}{x^2+2} - \frac{3}{2} \frac{2x}{x^2+3} \right) \\ &= \frac{2x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}} - \frac{3x(x^2+2)}{(x^2+3)^2\sqrt{x^2+3}} \end{aligned}$$

が得られる。