数学序論問題解説 ♯14

演習問題 5.25　以下の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos(\alpha x)}{\log\cos(\beta x)}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x}\quad (a,b>0)$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{e^x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+3^x)}{x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x\log x$　(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^x$　(11) $\displaystyle\lim_{x\to +0} x^{\frac{1}{x}}$　(12) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$　(14) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\right)^{e^{2x}}$

(1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\big(\sin x - x\cos x\big)'}{\big(x^3\big)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2}\\
&= \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\log(1+x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\big(e^x - e^{-x}\big)'}{\big(\log(1+x)\big)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x}}{\dfrac{1}{1+x}}\\
&= \lim_{x\to 0}(1+x)(e^x+e^{-x}) = 2
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos(\alpha x)}{\log\cos(\beta x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{\big(\log\cos(\alpha x)\big)'}{\big(\log\cos(\beta x)\big)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos(\alpha x)}\cdot\big(-\sin(\alpha x)\big)\cdot\alpha}{\dfrac{1}{\cos(\beta x)}\cdot\big(-\sin(\beta x)\big)\cdot\beta}\\
&= \frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)}\cdot\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}\\
&= \frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\beta x)}{\cos(\alpha x)}\cdot\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\,\frac{\beta x}{\sin(\beta x)}\,\frac{\alpha}{\beta}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

(4)

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(a^x - b^x\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0} (\log a \cdot a^x - \log b \cdot b^x) = \log a - \log b$$

(5)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{e^x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^5\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^4}{e^x} = 5\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^4\right)'}{\left(e^x\right)'} = 5\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3}{e^x} \\ &= 20\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^3\right)'}{\left(e^x\right)'} = 20\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} = 60\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'} = 60\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \\ &= 120\lim_{x\to\infty} \frac{\left(x\right)'}{\left(e^x\right)'} = 120\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\log(1+3^x)}{x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\log(1+3^x)\right)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+3^x}\log 3 \cdot 3^x \\ &= \log 3 \lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{1+3^x} = \log 3 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{3^x}+1} \\ &= \log 3\end{aligned}$$

(7)

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\tan x} = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{x\sin x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} = \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

となるので (1) の結果を用いる。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x\tan x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \cdot \frac{x}{\sin x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(8)

$$\lim_{x\to +0} x\log x = \lim_{x\to +0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +0} \frac{\left(\log x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to +0} x = 0$$

(9)　$t = \dfrac{1}{x}$ とおくと $x \to \infty$ のとき $t \to +0$ である。

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to +0} \frac{1}{t}\sin t = \lim_{t\to +0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

(10) $y=x^x$ に対し $\log y = x\log x$ である。

$$\lim_{x\to+0}\log y = \lim_{x\to+0} x\log x = 0$$

が成立している。ここで (8) の結果を用いた。$\log x$ は単射であり，連続関数なので

$$\log 1 = 0 = \lim_{x\to+0}\log y = \log\left(\lim_{x\to+0} y\right)$$

より $\displaystyle\lim_{x\to+0} y = 1$ となる。

(11) $0<a<b$ かつ $X>0$ に対し $a^X < b^X$ が成立する。x が 0 に近づくとき $x<\dfrac{1}{2}$ としてよい。$0<x<\dfrac{1}{2}$ かつ $\dfrac{1}{x}>0$ なので $0<x^{\frac{1}{x}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ となる。$x\to+0$ のとき $\dfrac{1}{x}\to\infty$ なので $0\le\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\frac{1}{x}}\le\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=0$ なので $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^{\frac{1}{x}}=0$ である。

(12) $y=\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\dfrac{1}{x}}$ なので $\log y = \log\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{1}{x}\log\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)$ となる。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\log y &= \lim_{x\to0}\frac{\log\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\left(\log\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)\right)'}{x'}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{1}{\dfrac{a^x+b^x}{2}}\left(\frac{a^x\log a + b^x\log b}{2}\right) = \lim_{x\to0}\frac{a^x\log a+b^x\log b}{a^x+b^x}\\ &= \frac{\log a+\log b}{2} = \frac{1}{2}\log ab = \log(ab)^{\frac{1}{2}} = \log\sqrt{ab}\end{aligned}$$

が成立する。$\log$ は連続なので $\log\left(\displaystyle\lim_{x\to0}y\right)=\log\sqrt{ab}$ を得る。また $\log$ は単射なので $\displaystyle\lim_{x\to0}y=\sqrt{ab}$ となる。

即ち

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\dfrac{1}{x}} = \sqrt{ab}$$

となる。

(13) $y=\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ とおくと，$\log y = \dfrac{1}{x^2}\log\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)$ である。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\log y &= \lim_{x\to0}\frac{\left(\log\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)\right)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\frac{x}{\tan x}\frac{\dfrac{x}{\cos^2 x}-\tan x}{x^2}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{2x-\sin 2x}{2x^2\sin 2x} = \lim_{x\to0}\frac{(2x-\sin 2x)'}{(2x^2\sin 2x)'}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{2x\sin 2x+2x^2\cos 2x} = \lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 2x)'}{(2x\sin 2x+2x^2\cos 2x)'}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 2x+4x\cos 2x-2x^2\sin 2x} = \lim_{x\to0}\frac{(\sin 2x)'}{(\sin 2x+4x\cos 2x-2x^2\sin 2x)'}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{3\cos 2x - 6x\sin 2x - 2x^2\cos 2x} = \frac{1}{3}$$

より

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0}\exp(\log y) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\log y\right) = \exp\left(\frac{1}{3}\right)$$

(14) $y = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)^{e^{2x}}$ とおくと

$$\log y = e^{2x}\log\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right) = \frac{\log(e^x + e^{-x}) - \log(e^x - e^{-x})}{e^{-2x}}$$

である。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\log y &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\log(e^x + e^{-x}) - \log(e^x - e^{-x}))'}{(e^{-2x})'} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}{-2e^{-2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1 - e^{-4x}} = 2\end{aligned}$$

より

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\exp(\log y) = \exp\left(\lim_{x\to\infty}\log y\right) = \exp(2) = e^2$$

演習問題 5.26

(1)　$f(x) = x^2 + x + 1$ とする。$(1,3)$ における f のグラフの接線と法線の方程式を求めよ。
(2)　原点を通る直線が $y = f(x) = x^2 + x + 1$ に接している。このときこの直線の方程式を求めよ。
(3)　$f(x) = x(x-1)(x-2)$ のグラフに接し，$y = 2x + 1$ と平行な直線の方程式を求めよ。
(4)　放物線 $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ 上に相異なる 2 点 $P(x_1, f(x_1)), Q(x_2, f(x_2))$ をとったとする。この放物線の接線で，線分 PQ に平行となるのは，どの点における接線か？ その点の x 座標の値を求めよ。
(5)　直線 $y = mx + 1$ が $y = f(x) = x^4 - x^2 + 1$ に接しているとき m を求めよ。
(6)　直線 $y = mx + n$ が $y = f(x)$ に異なる 2 点で接しているとき複接線という。$y = f(x) = x^4 - x^2 + x + 1$ の複接線を求めよ。

(1)　$x = a$ における接線の方程式は

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

である。$f'(x) = 2x + 1$ なので $f'(1) = 3$ である。$f(1) = 3$ なので接線の方程式は

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 3(x-1) + 3 = 3x$$

である。法線は接線と直交するので法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(1)} = -\dfrac{1}{3}$ である。よって法線の方程

式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{f'(1)}(x-1)+f(1) \\ &= -\frac{1}{3}(x-1)+3 \\ &= -\frac{1}{3}x+\frac{10}{3} \end{aligned}$$

である。
(2)　$x=a$ における接線の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

である。今 $f'(x)=2x+1$ なので方程式は

$$y=(2a+1)(x-a)+a^2+a+1=(2a+1)x-a^2+1$$

となる。この直線が原点を通るので $0=-a^2+1$ より，$a=\pm 1$ となる。よって求める接線は $y=3x$ および $y=-x$ である。
(3)　$x=a$ における接線の方程式は

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

である。この接線が $y=2x+1$ と平行のとき $f'(a)=2$ が成立している。$f'(x)=3x^2-6x+2$ なので $f'(a)=3a^2-6a+2=2$ となる。これを解いて $a=0,2$ を得る。$f(0)=0$，$f(2)=0$ なので $a=0$ のとき接線の方程式は

$$y=2x$$

$a=2$ のときの接線の方程式は

$$y=2x-4$$

となる。
(4)　線分 PQ の傾きは

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} &= \frac{ax_2^2+bx_2+c-(ax_1^2+bx_1+c)}{x_2-x_1} = \frac{a(x_2-x_1)(x_2+x_1)+b(x_2-x_1)}{x_2-x_1} \\ &= a(x_2+x_1)+b \end{aligned}$$

となる。

$$f'(x)=2ax+b$$

なので接線が線分 PQ と平行となるような点の x 座標は $x=\dfrac{x_2+x_1}{2}$ である。接点の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+c\right)$$

である。
(5)　$F(x)=f(x)-(mx+1)$ とおく。$y=mx+1$ は $y=f(x)$ の接線なので $F(x)=0$ は重解 $x=a$ を持つ。このとき $F(a)=0, F'(a)=0$ が成立する。

$$F(x)=x^4-x^2-mx$$

$$F'(x)=4x^3-2x-m$$

なので $F'(a) = 4a^3 - 2a = m$ を $F(a) = a^4 - a^2 - am = 0$ に代入して $a = 0, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。よって $m = 0, \mp\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

(6)　$F(x) = f(x) - (mx + n)$ とおく。$y = mx + n$ は複接線なので 2 つの異なる接点を $(a, f(a)), (b, f(b))$ とする。$F(x)$ は $(x-a)^2$ および $(x-b)^2$ で割り切れる。このことより $F(x)$ は $(x-a)^2(x-b)^2$ で割り切れる。最高次係数を比較することにより $F(x) = (x-a)^2(x-b)^2$ が分かる。

$$(x-a)^2(x-b)^2 = x^4 - 2(a+b)x^3 + \left((a+b)^2 + 2ab\right)x^2 - 2ab(a+b)x + a^2b^2$$

となるが $F(x)$ と係数を比較して $a + b = 0, ab = -\dfrac{1}{2}$ が分かる。このとき

$$m = 1$$
$$n = 1 - (ab)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

となり，求める接線は

$$y = x + \frac{3}{4}$$

である。

演習問題 5.27　命題 5.23 を証明せよ。ただし (2) の証明には平均値の定理と呼ばれる次の定理を用いてよい。f が (a, b) で微分可能であり，$[a, b]$ で連続のとき，

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

となる c $(a < c < b)$ が存在する。

(1)　c が関数 $y = f(x)$ の極大点とする。ある正数 δ が存在して $0 < |x - c| < \delta$ を満たす任意の x に対し $f(x) < f(c)$ が成立する。c に十分近い x に対しては $f(x) - f(c) < 0$ が成立している。絶対値の十分小さい $h > 0$ に対しては

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0$$

が成立しているので

$$f'_+(c) = \lim_{h \to +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

が成立する。絶対値の十分小さい $h < 0$ に対しては

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0$$

が成立しているので

$$f'_-(c) = \lim_{h \to -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

が成立する。$f'(c)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ が存在する必要十分条件は $f'_+(c)=\lim_{h\to +0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ および $f'_-(c)=\lim_{h\to -0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ が存在して，$f'_+(c)=f'_-(c)$ が成立することである。よって

$$0\leq f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0$$

より

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$$

となる。よって c は臨界点である。

c が関数 $y=f(x)$ の極小点とする。ある正数 δ が存在して $0<|x-c|<\delta$ を満たす任意の x に対し $f(x)>f(c)$ が成立する。c に十分近い x に対しては $f(x)-f(c)>0$ が成立している。絶対値の十分小さい $h>0$ に対しては

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0$$

が成立しているので

$$f'_+(c)=\lim_{h\to +0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq 0$$

が成立する。絶対値の十分小さい $h<0$ に対しては

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}<0$$

が成立しているので

$$f'_-(c)=\lim_{h\to -0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0$$

が成立する。$f'(c)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ が存在する必要十分条件は $f'_+(c)=\lim_{h\to +0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ および $f'_-(c)=\lim_{h\to -0}\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ が存在して，$f'_+(c)=f'_-(c)$ が成立することである。よって

$$0\leq f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq 0$$

より

$$f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$$

となる。よって c は臨界点である。

(2)　$(\,a,b\,)$ で $f'(x)>0$ が成立しているとする。x_1,x_2 を $[\,a,b\,]$ の $x_1<x_2$ を満たす任意の元とする。平均値の定理より

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)\qquad (x_1<c<x_2)$$

を満たす c が存在する。このとき $f'(c)>0$ であり $x_1<x_2$ なので $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)>0$ となる。よって f は増加の状態にある。

$(\,a,\,b\,)$ で $f'(x)<0$ が成立しているとする。x_1, x_2 を $[\,a,\,b\,]$ の $x_1<x_2$ を満たす任意の元とする。平均値の定理より

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c) \qquad (x_1<c<x_2)$$

を満たす c が存在する。このとき $f'(c)<0$ であり $x_1<x_2$ なので $f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)<0$ となる。よって f は減少の状態にある。

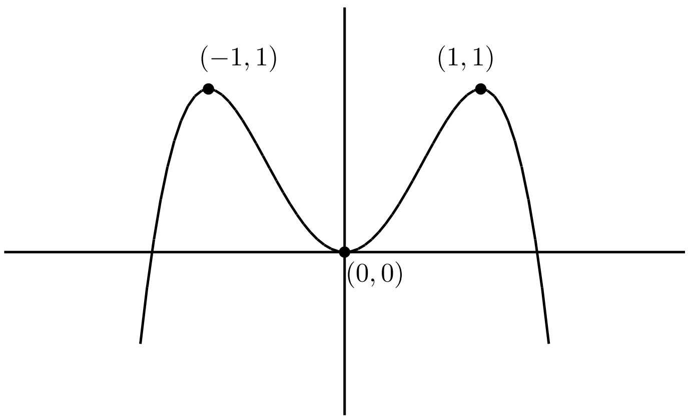
演習問題 5.28　以下の関数のグラフの概形を描け。

(1) $f(x)=2x^2-x^4$
(2) $f(x)=xe^{-x}$
(3) $f(x)=x^2\log x$
(4) $f(x)=3\sin x+\sin 3x$
(5) $f(x)=x-\sqrt{1+x}$
(6) $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$
(7) $f(x)=x+2\cos x$
(8) $f(x)=\sin x(1+\cos x)$
(9) $f(x)=x^{-x^2}$
(10) $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)$

(1)　$f'(x)=4x-4x^3=4x(1-x^2)=4x(1-x)(1+x)$ なので $f'(x)=0$ となるのは $x=-1,0,1$ である。増減表は次のようになる。

x		-1		0		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

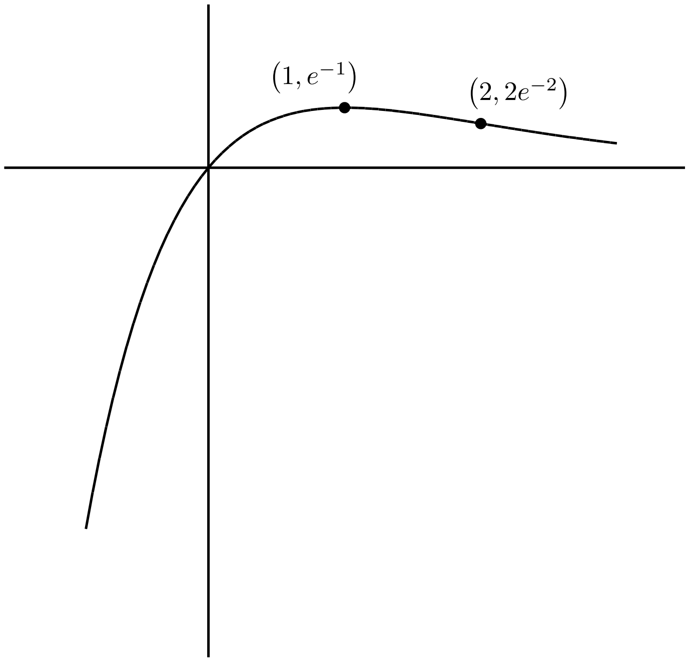
$f(x)=2x^2-x^4=0$ を解くと $x=0,\pm\sqrt{2}$ となる。よって曲線は x 軸と 3 点で交わっている。($x=0$ は重解なので接している。) このことに注意して概形を描くと次図のようになる。



(2)　$f'(x)=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)e^{-x}$ なので $f'(x)=0$ となるのは $x=1$ のときのみである。増減表は次のようになる。

x		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ および $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ということに注意してグラフを描くと次図のようになる。



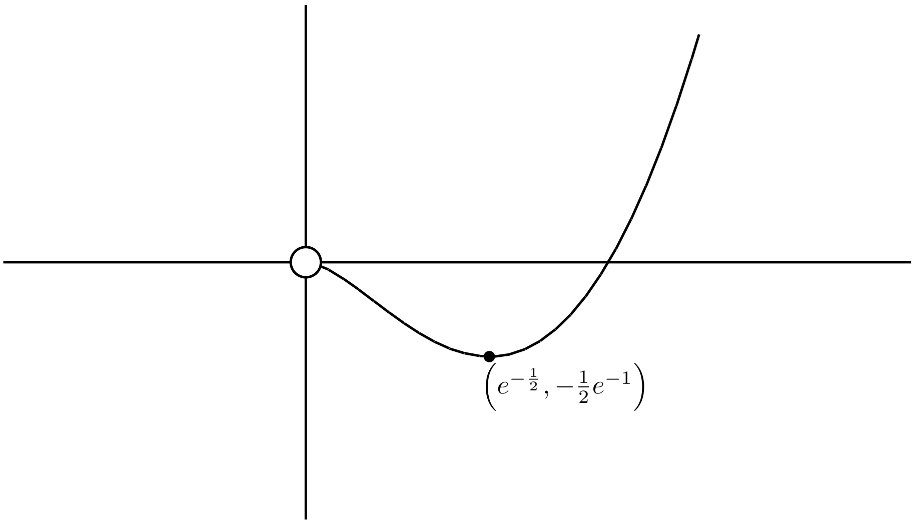
(3)　$\log x$ が定義されるのは $x > 0$ なので $f(x)$ の定義域も $x > 0$ である。$f'(x) = 2x\log x + x^2\dfrac{1}{x} = x(2\log x + 1) = 0$ を解いて，$x = \sqrt{\dfrac{1}{e}}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		$\sqrt{\dfrac{1}{e}}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2e}$	$\nearrow$

$x \to +0$ としたときの関数の挙動を調べる。ここでは後で学ぶロピタルの定理を用いる。

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} x^2\log x &= \lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}\frac{\left(\log x\right)'}{\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'} \\
&= \lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}} \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to+0} x^2 = 0
\end{aligned}$$

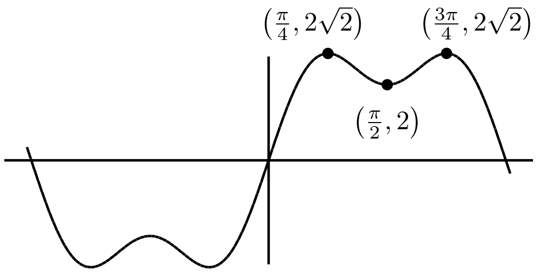
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ であり，また $f(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のときのみである。このことに注意してグラフを描くと次図の様になる。



(4)　$\sin x$ は周期 2π の周期関数であり，$\sin 3x$ は周期 $\dfrac{2\pi}{3}$ の周期関数である。これより $f(x)$ は周期 2π の周期関数になる。よって $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲でグラフを描き，それを x 軸の方向へ $2n\pi$(n は整数) 平行移動したグラフが求めるグラフとなる。よって $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲で調べる。

$f'(x) = 3\cos x + 3\cos 3x = 3\cos x + 3(4\cos^3 x - 3\cos x) = 6\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) = 0$ となるのは $\cos x = 0$ または $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}$ なので，$-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲では $x = -\dfrac{3}{4}\pi, -\dfrac{1}{2}\pi, -\dfrac{1}{4}\pi, \dfrac{1}{4}\pi, \dfrac{1}{2}\pi, \dfrac{3}{4}\pi$ である。よって増減表は次のようになり，グラフは次図のようになる。

x		$-\frac{3}{4}\pi$		$-\frac{1}{2}\pi$		$-\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{4}\pi$		$\frac{1}{2}\pi$		$\frac{3}{4}\pi$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\searrow$



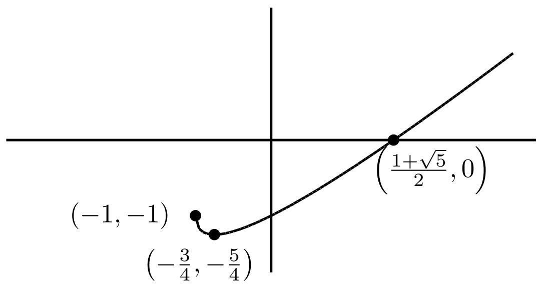
(5)　$f(x) = x - \sqrt{1+x}$ は $1 + x \geq 0$ で定義されている。$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ なので $f'(x) = 0$ より $x = -\dfrac{3}{4}$ となる。

x		$-\frac{3}{4}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

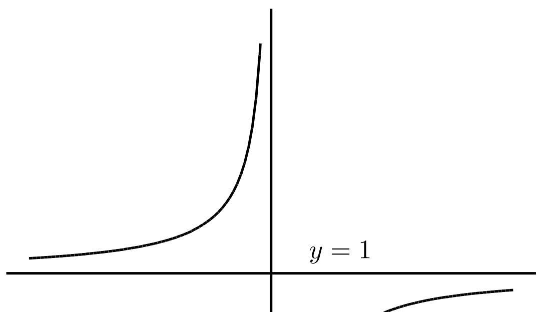
$f(x)=0$ とすると $x-\sqrt{1+x}=0$ より $x=\sqrt{1+x}$ となる。両辺を 2 乗して

$$x^2=1+x$$

を得る。この 2 次方程式の解は $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ である。しかし $x=\sqrt{1+x}\geq 0$ より $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ は不適である。また $f(0)=0-\sqrt{1+0}=-1$ である。以上のことに注意してグラフを描くと次図のようになる。



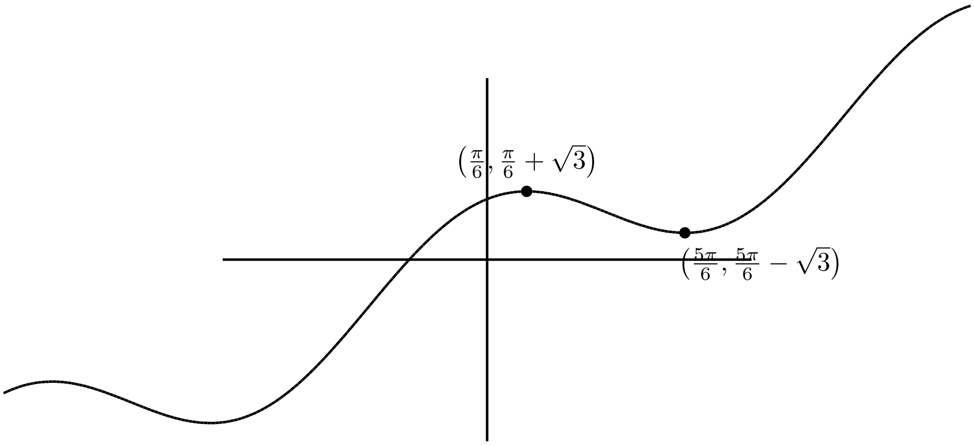
(6)　$f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ なので $1-\dfrac{1}{x}\geq 0$ が必要である。$x\geq 0$ のときは $1\geq\dfrac{1}{x}$ より $x\geq 1$ である。$x<0$ のときは常に $1-\dfrac{1}{x}\geq 0$ である。$f'(x)=\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\dfrac{1}{x^2}$ は $x=1$ においては微分可能ではない。それ以外では $f'(x)>0$ である。$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=1$ $\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\infty$ ということに注意してグラフを描くと次図のようになる。

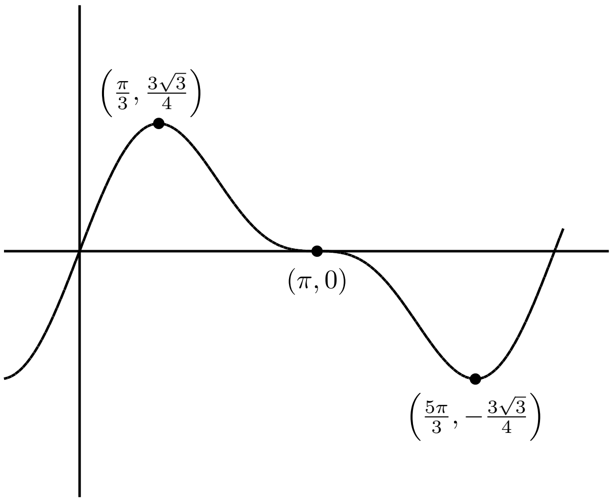


(7)　$f(x)=x+2\cos x$ なので $f(x+2\pi)=f(x)+2\pi$ が成立する。$0\leq x\leq 2\pi$ でグラフを描いて，そのグラフを x 軸方向に $2n\pi$，y 軸方向に $2n\pi$ 移動したもの全体が関数のグラフになる (ここで n は整数)。

$f(x)=x+2\cos x$ なので $f'(x)=1-2\sin x$ である。$f'(x)=0$ となるのは $\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}$ である。増減表とグラフは次のようになる。

x		$\dfrac{\pi}{6}$		$\dfrac{5\pi}{6}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	$\searrow$	$\dfrac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$	





(8)　$f(x)$ は周期 2π の周期関数なので $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲で考える。$f'(x) = \cos x(1+\cos x) - \sin^2 x = \cos x + \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$ とすると，$\cos x + 1 = 0$ または $2\cos x - 1 = 0$ である。$\cos x + 1 = 0$ のとき $x = -\pi, \pi$ である。$2\cos x - 1 = 0$ のとき $x = -\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}$ である。増減表は次のようになるので，グラフは前図の様になる。

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{3}$		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0

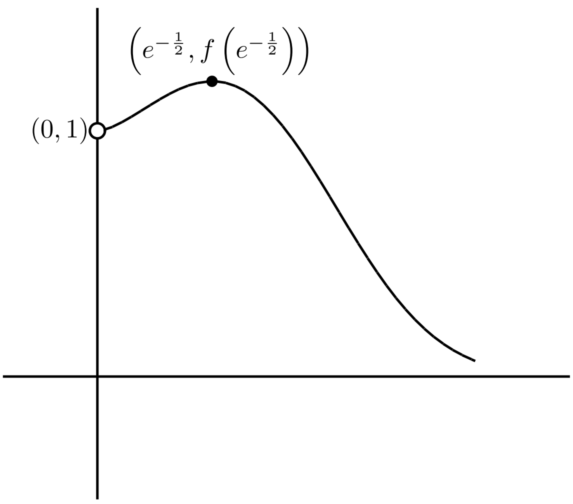
(9)　$f(x) = x^{-x^2}$ なので定義域は $x > 0$ である。導関数を求めるのに対数微分法を用いる。$y = x^{-x^2}$ とすると $\log y = -x^2 \log x$ である。両辺を x で微分すると $\dfrac{1}{y}y' = -2x\log x - x^2\dfrac{1}{x} = -2x\log x - x$ なので $y' = -x \cdot x^{-x^2}\bigl(2\log x + 1\bigr)$ となる。$f'(x) = 0$ とすると，$2\log x + 1 = 0$ なので $x = e^{-\frac{1}{2}}$ となる。増減表は

x		$e^{-\frac{1}{2}}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(e^{-\frac{1}{2}})$	$\searrow$

となる。$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ である。また $\lim_{x\to+0} f(x)$ を求める。$\log y = -x^2 \log x$ の極限を求める。

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} \log f(x) = \lim_{x\to+0} \left(-x^2 \log x\right) &= -\lim_{x\to+0} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} \\
&= -\lim_{x\to+0} \frac{\left(\log x\right)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = -\lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-2\frac{1}{x^3}} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{x\to+0} x^2 = 0
\end{aligned}
$$

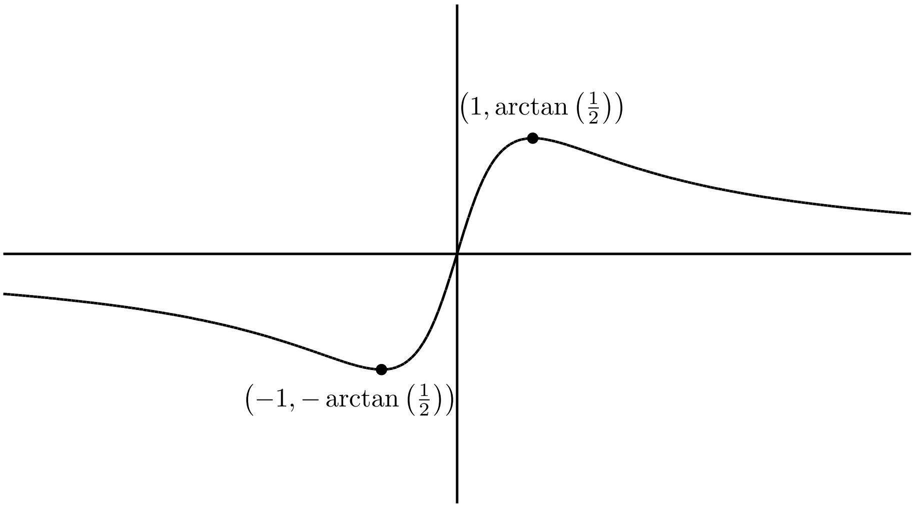
なので，$0 = \lim_{x\to+0} \log f(x) = \log\left(\lim_{x\to+0} f(x)\right)$ となる。よって $\lim_{x\to+0} f(x) = 1$ となる。以上を考慮してグラフを書くと次図のようになる。



(10) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x}{1+x^2}\right)^2} \dfrac{x'(1+x^2)-(x2x)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+2x^2)(1+x^2)}$ より $f'(x) = 0$ となる x は $x = \pm 1$ である。$f'(2) < 0, f'(0) > 0, f'(-2) < 0$ である。増減表は

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\arctan\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\arctan\frac{1}{2}$	$\searrow$

となる。$\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$ より $\lim_{x\to\infty} \arctan \dfrac{x}{1+x^2} = 0$，$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$ より $\lim_{x\to-\infty} \arctan \dfrac{x}{1+x^2} = 0$ となる。以上に考慮してグラフを描くと次図のようになる。



ここで $\arctan\dfrac{1}{2}$ の近似値をきちんと求めることは要求していないが，おおよその値を概算するなら $\dfrac{\pi}{8} < \arctan\dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{6}$ であることが以下の様に分かる。

$\arctan\dfrac{1}{2} = x$ とおくと $\tan x = \dfrac{1}{2}(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2})$ であるが $\tan x = \dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\dfrac{\pi}{6}$ より $x < \dfrac{\pi}{6}$ である。

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\dfrac{1}{2}}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} > 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

より $2x > \dfrac{\pi}{4}$ である。

演習問題 5.29 $x_1, x_2 \in [\,a,\,b\,]$ に対し $F(x) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)-f(x)$ とおき，$F(x)$ の正負を調べることにより命題 5.25 を証明せよ。

$f''(x) < 0$ の場合も同様にできるので，$f''(x) > 0$ の場合のみ証明する。$x_1 < x_2$ としても一般性を失わないので，この場合を考える。

$$\begin{aligned} F(x_1) &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_1-x_1)+f(x_1)-f(x_1) \\ &= f(x_1)-f(x_1)=0 \\ F(x_2) &= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_2-x_1)+f(x_1)-f(x_2) \\ &= f(x_2)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2)=0 \end{aligned}$$

が成立しているので，$F(x)$ の $[\,x_1,\,x_2\,]$ における最大値，または最小値を与える x_3 で $x_1 < x_3 < x_2$ となるものが存在する。このとき $x = x_3$ で $F'(x_3) = 0$ が成立している。$F''(x) = -f''(x) < 0$ なので $F'(x)$ は $[\,x_1,\,x_2\,]$ で単調減少である。よって $F'(x)$ の $[\,x_1,\,x_2\,]$ における

増減表は次のようになっている。

x	x_1		x_3		x_2
$F''(x)$		$-$		$-$	
$F'(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

よって $(\,x_1,\,x_3\,)$ において $F'(x)>0$，$(\,x_3,\,x_2\,)$ において $F'(x)<0$ である。よって $F(x)$ の増減表は次のようになっている。

x	x_1		x_3		x_2
$F'(x)$		$+$	0	$-$	
$F(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって $(\,x_1,\,x_2\,)$ において $F(x)>0$ となるので

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)+f(x_1)>f(x)$$

が成立し，上に凸であることが示された。

演習問題 5.30　$f''(c)=0$ であって $f'''(c)\neq 0$ ならば，変曲点であることを証明せよ。

$f'''(c)\neq 0$ なので $f'''(c)>0$ の場合と $f'''(c)<0$ の場合に分ける。
(1)　$f'''(c)>0$ **の場合：**　c を含む小区間 $[\,a,\,b\,]$ で $f'''(x)>0$ としてよい。$f''(x)$ は $[\,a,\,b\,]$ で単調増加なので，$a\leq x<c$ において $f''(x)<0$ であり，$c<x\leq b$ で $f''(x)>0$ である。命題 5.20 より $[\,a,\,c\,)$ において上に凸であり，$(\,c,\,b\,]$ において下に凸である。よって c は変曲点である。
(2)　$f'''(c)<0$ **の場合：**　c を含む小区間 $[\,a,\,b\,]$ で $f'''(x)<0$ としてよい。$f''(x)$ は $[\,a,\,b\,]$ で単調減少なので，$a\leq x<c$ において $f''(x)>0$ であり，$c<x\leq b$ で $f''(x)<0$ である。命題 5.21 より $[\,a,\,c\,)$ において下に凸であり，$(\,c,\,b\,]$ において上に凸である。よって c は変曲点である。

演習問題 5.31　次の関数のグラフの凹凸を調べ概形を描け。

(1) $y=(x-5)^4(x+1)^3$　　(2) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$

(3) $y=e^{-x^2}$　　(4) $y=x\log x$

(1)

$$\begin{aligned} y' &= 4(x-5)^3(x+1)^3+3(x-5)^4(x+1)^2 \\ &= (x-5)^3(x+1)^2\{4(x+1)+3(x-5)\} \\ &= (x-5)^3(x+1)^2(7x-11) \end{aligned}$$

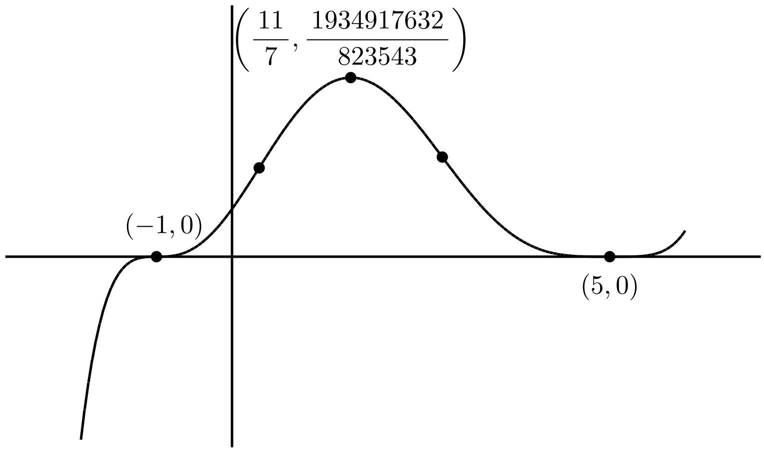
なので $y'=0$ を解いて $x=-1$，5，$\dfrac{11}{7}$ を得る。

$$y'' = 6(x-5)^2(x+1)(7x^2-22x+7)$$

なので $y'' = 0$ を解いて $x = -1$，5，$\dfrac{11+6\sqrt{2}}{7}$，$\dfrac{11-6\sqrt{2}}{7}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		-1		$\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$		$\frac{11}{7}$		$\frac{11+6\sqrt{2}}{7}$		5	
y'	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↗		↗		↗		↘		↘		↗

x 軸との交点は $y = 0$ を解いて $x = -1, 5$ である。y 軸との交点は y に $x = 0$ を代入して $(-5)^4 = 5^4$ である。以上を考慮してグラフの概形を描くと次のようになっている。



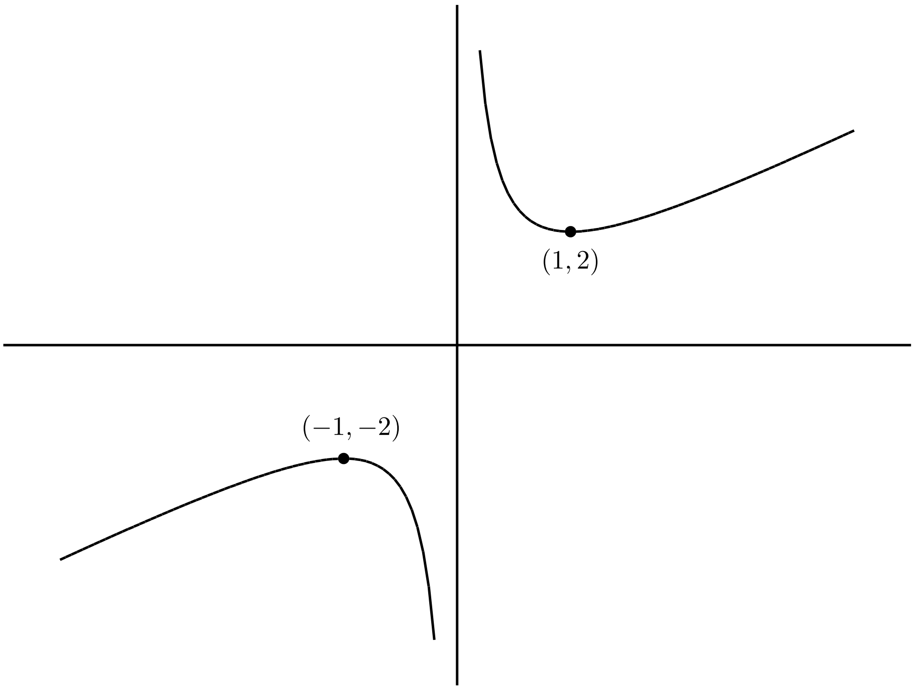
(2)　$y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = -1$，1 を得る。$y'' = \dfrac{2}{x^3}$ なので増減表は次の様になる。

x		-1		0		1	
y'	$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$
y	↗		↘	$\times$	↘		↗

グラフは x 軸とも y 軸とも交わらない。

$$\lim_{x\to+0} y = \infty, \quad \lim_{x\to-0} y = -\infty, \quad \lim_{x\to\infty} y = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$$

なのでグラフの概形は次図のようになる。



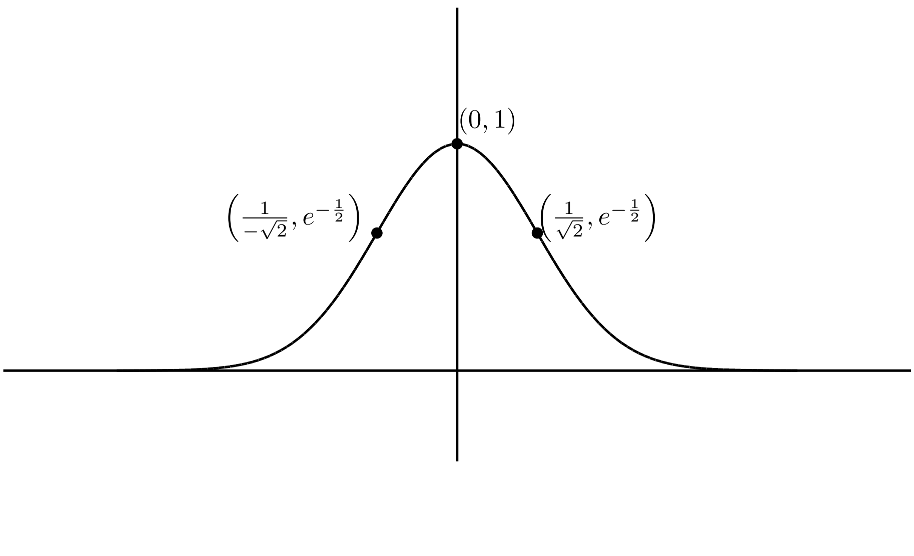
(3)　$y' = -2xe^{-x^2}$ なので $y' = 0$ を解いて $x = 0$ を得る。$y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2}$ なので $y'' = 0$ を解いて $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。よって増減表は次の様になる。

x		$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗		↗		↘		↘

グラフは x 軸とは交わらない。y 軸との交点は $y = 1$ である。また

$$\lim_{x\to\infty} y = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} y = 0$$

なのでグラフの概形は次図のようになる。



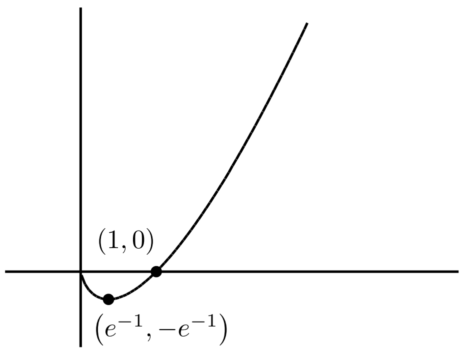
(4)　$y' = \log x + 1$ なので $y' = 0$ を解いて $x = \dfrac{1}{e}$ を得る。$y'' = \dfrac{1}{x}$ なので $y'' = 0$ となる x は存在しない。よって増減表は次の様になる。

x	0		$\frac{1}{e}$	
y'	$\times$	$-$	0	$+$
y''	$\times$	$+$	$+$	$+$
y		↘		↗

x 軸との交点は $x = 1$ であり，y 軸とは交わらない。また $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$ である。この後学んだロピタルの定理を用いると

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+0} x\log x &= \lim_{x\to+0} \frac{\log x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to+0} \frac{\bigl(\log x\bigr)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} \\
&= \lim_{x\to+0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} x = 0
\end{aligned}
$$

が分かる。以上からグラフの概形は次のようになっている。



演習問題 5.32　次のようにパラメータ表示された曲線の概形を書け。

(1) $x = x(t) = t^4 - t^2, y = y(t) = t^3 - t$　　(2) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^4$

(3) $x = x(t) = t^2 - t^3, y = y(t) = t - 2t^4$　　(4) $x = x(t) = t - t^3, y = y(t) = 1 - t^2 - t^4$

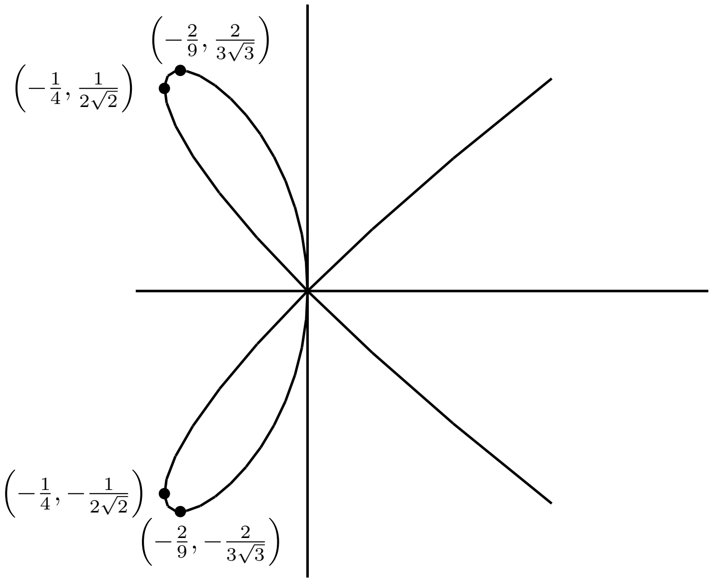
(1)　$x'(t) = 4t^3 - 2t$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = 0, \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を得る。$y'(t) = 3t^2 - 1$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$		$\rightarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$

$x'(t)=0$ および $y'(t)=0$ となる点は $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$, $(x(0), y(0))=(0,0)$, $\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(-\frac{2}{9}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ である。

$x(t)=0$ を解くと $t=0,\pm 1$ を得る。$(x(0), y(0))=(0,0)$, $(x(1), y(1))=(0,0)$, $(x(-1), y(-1))=(0,0)$ なので y 軸との交点は $(0,0)$ である。

$y(t)=0$ を解くと $t=0,\pm 1$ を得る。x 軸との交点は $(0,0)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



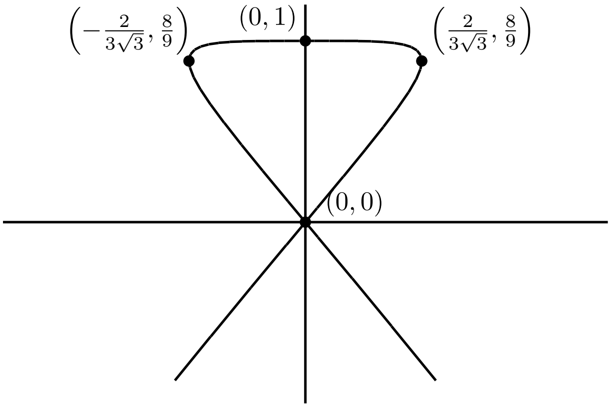
(2)　$x'(t)=1-3t^2$ なので $x'(t)=0$ を解いて $t=\mp\frac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。$y'(t)=-4t^3$ なので $y'(t)=0$ を解いて $t=0$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

$x'(t)=0$ および $y'(t)=0$ となる点は $\left(x\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{8}{9}\right)$，$(x(0), y(0))=(0,1)$，$\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{8}{9}\right)$ である。

$x(t)=0$ を解くと $t=0,\pm1$ を得る。$(x(0), y(0))=(0,1)$，$(x(1), y(1))=(0,0)$，$(x(-1), y(-1))=(0,0)$ なので y 軸との交点は $(0,0),(0,1)$ である。

$y(t)=0$ を解くと $t=\pm1$ を得る。x 軸との交点は $(0,0)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



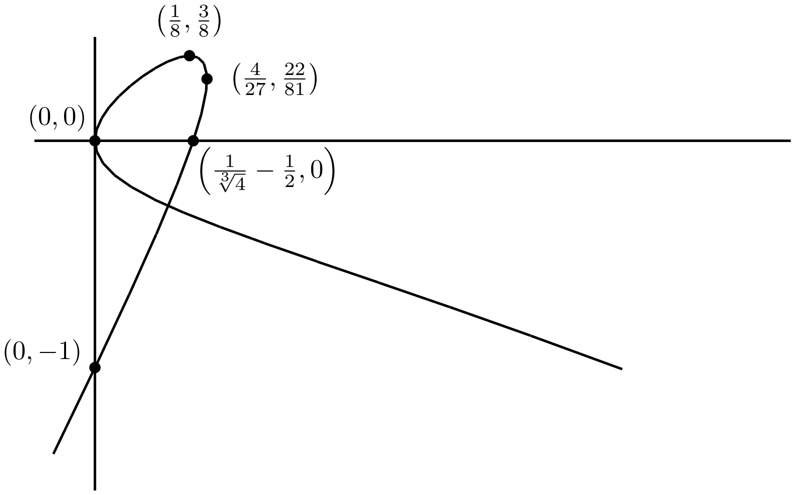
(3)　$x'(t)=2t-3t^2$ なので $x'(t)=0$ を解いて $t=0,\frac{2}{3}$ を得る。$y'(t)=1-8t^3$ なので $y'(t)=0$ を解いて $t=\frac{1}{2}$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

$x'(t)=0$ および $y'(t)=0$ となる点は $(x(0), y(0))=(0,0)$，$\left(x\left(\frac{1}{2}\right), y\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$，$\left(x\left(\frac{2}{3}\right), y\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\left(\frac{4}{27}, \frac{22}{81}\right)$，である。

$x(t)=0$ を解くと $t=0,1$ を得る。$(x(0), y(0))=(0,0)$，$(x(1), y(1))=(0,-1)$ なので y 軸との交点は $(0,0),(0,-1)$ である。

$y(t)=0$ を解くと $t=0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ を得る。x 軸との交点は $(0,0),\left(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}-\frac{1}{2},0\right)$ である。以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



(4)　$x'(t) = 1 - 3t^2$ なので $x'(t) = 0$ を解いて $t = \mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を得る。$y'(t) = -2t - 4t^3$ なので $y'(t) = 0$ を解いて $t = 0$ を得る。$x'(t), y'(t)$ の正負を調べるために，途中の値を代入して調べると増減表は以下の様になる。

t		$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$		0		$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	
x'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$\leftarrow$		$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\rightarrow$		$\leftarrow$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$		$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
曲線	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$

$x'(t) = 0$ および $y'(t) = 0$ となる点は $\left(x\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(-\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \dfrac{5}{9}\right)$，$(x(0), y(0)) = (0, 1)$，$\left(x\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right), y\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \left(\dfrac{2}{3\sqrt{3}}, \dfrac{5}{9}\right)$ である。

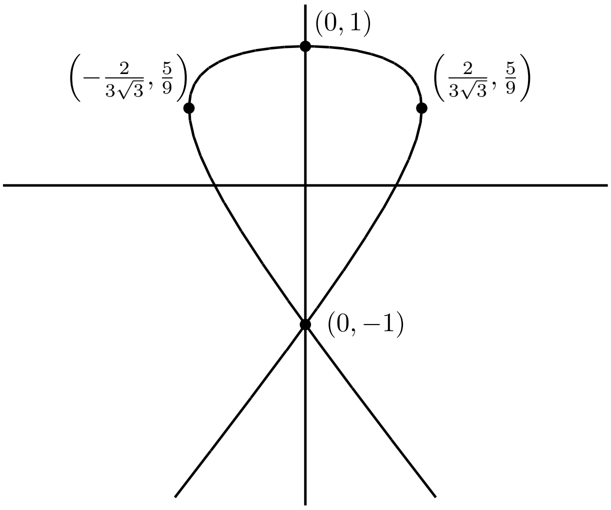
$x(t) = 0$ を解くと $t = 0, \pm 1$ を得る。$(x(0), y(0)) = (0, 1)$，$(x(1), y(1)) = (0, -1)$，$(x(-1), y(-1)) = (0, -1)$ なので y 軸との交点は $(0, 0), (0, -1)$ である。

$y(t) = 0$ を解くと $t = \pm\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ を得る。x 軸との交点は $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}, 0\right)$，$\left(-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}, 0\right)$ である。概形なので $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ の値もおおよそ分かればよい。$2 < \sqrt{5} < \dfrac{5}{2}$ から $1 < -1+\sqrt{5} < \dfrac{3}{2}$，$\dfrac{1}{2} < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < \dfrac{3}{4}$ と変形して $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を得る。同様に $\dfrac{1}{4} < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < \dfrac{1}{2}$ を得るので，

$$0.18 \fallingdotseq \frac{1}{4\sqrt{2}} < \frac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} < \frac{\sqrt{3}}{4} \fallingdotseq 0.43$$

が分かる。$2.1 < \sqrt{5} < 2.3$ から始めると $0.2711 < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}} < 0.322$ ともう少し正確な値の範囲が分かるが，概形なのでここまで近似を良くしなくてもいいかもしれない。

以上を考慮して曲線の概形を描くと次の様になる。



演習問題 5.33　次を示せ。

(1) 底辺の長さが L で 3 辺の長さの和が $3L$ の三角形の中で面積最大なものを求めよ。ヘロンの公式 [三角形の三辺の長さを a,b,c とし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とおくとき，三角形の面積 S は $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で与えられる。] を既知としてよい。

(2) a,b,c,d を実数とするとき $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$ が成立する (シュワルツの不等式)。

(3) a_1,a_2,a_3 を正の実数とするとき

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$

が成立する。

(4) n を自然数とし，$a_1,a_2,\ldots,a_n$ を正の実数とするとき

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

が成立する。

(1)　底辺以外の一辺の長さを x とおくと，残りの辺の長さは $2L-x$ である。$s=\dfrac{3L}{2}$ なので面積は $S=\sqrt{\dfrac{3L}{2}\dfrac{L}{2}\left(\dfrac{3L}{2}-x\right)\left(x-\dfrac{L}{2}\right)}$ である。長さ $L,x,2L-x$ が三角形をなす条件 (2 辺の和が他の辺より長い) より x の範囲は

$$\frac{L}{2}<x<\frac{3L}{2}$$

である。$G(x)=S^2$ とおくと，S が最大値をとることと $G(x)$ が最大値をとることは同値である。よって $\dfrac{L}{2}<x<\dfrac{3L}{2}$ での $G(x)$ の最大値を求める。$G(x)=-x^2+2Lx-\dfrac{3L^2}{4}$ より $G'(x)=-2x+2L$ となるので，$G'(x)=0$ となるのは $x=L$ である。$x<L$ のとき $G'(x)>0$

であり，$L < x$ のとき $G'(x) < 0$ なので $x = L$ で最大になる。このとき $2L - x = L$ なので，求める三角形は正三角形である。

(2)　$c^2 + d^2 = 0$ のとき $c = 0$ かつ $d = 0$ で式は成立している。よって $c^2 + d^2 \neq 0$ とする。

$c = 0$ のとき

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (a^2 + b^2)d^2 \geq b^2 d^2 = (a0 + bd)^2 = (ac + bd)^2$$

より成立している。よって $c \neq 0$ とする。

$F(x) = (a^2 + x^2)(c^2 + d^2) - (ac + xd)^2$ とおくとき，任意の実数 x に対し $F(x) \geq 0$ を示せばよい。

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2x(c^2 + d^2) - 2(ac + xd)d = 2c^2 x + 2d^2 x - 2acd - 2d^2 x \\ &= 2c^2 x - 2acd = 2c^2 \left(x - \frac{ad}{c} \right) \end{aligned}$$

$x < \dfrac{ad}{c}$ のとき $F'(x) < 0$，$x = \dfrac{ad}{c}$ のとき $F'(x) = 0$，$x > \dfrac{ad}{c}$ のとき $F'(x) > 0$ なので $F(x)$ は $x = \dfrac{ad}{c}$ で最小値をとる。

$$\begin{aligned} F\left(\frac{ad}{c} \right) &= \left(a^2 + \frac{a^2 d^2}{c^2} \right)(c^2 + d^2) - \left(ac + \frac{ad^2}{c} \right)^2 \\ &= a^2 \left(1 + \frac{d^2}{c^2} \right)(c^2 + d^2) - a^2 \left(c + \frac{d^2}{c} \right)^2 \\ &= a^2 \left(\frac{c^2 + d^2}{c^2} \right)(c^2 + d^2) - a^2 \left(\frac{c^2 + d^2}{c} \right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

最小値は 0 なので式は証明された。

(3)　a_1, a_2 を正の実数とする。$F(x) = \dfrac{a_1 + a_2 + x}{3} - \sqrt[3]{a_1 a_2 x}$ とおくとき $x > 0$ に対して $F(x) \geq 0$ を示す。

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(a_1 a_2 x)^{-\frac{2}{3}}(a_1 a_2) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 - (a_1 a_2)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{2}{3}} \right) \end{aligned}$$

$1 - (a_1 a_2)^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{2}{3}} = 0$ を計算すると $x = \sqrt{a_1 a_2}$ となる。よって $x < \sqrt{a_1 a_2}$ のとき $F'(x) < 0$，$x = \sqrt{a_1 a_2}$ のとき $F'(x) = 0$，$x > \sqrt{a_1 a_2}$ のとき $F'(x) > 0$ なので $F(x)$ は $x = \sqrt{a_1 a_2}$ で最

小値をとる。

$$
\begin{aligned}
F\left(\sqrt{a_1a_2}\right) &= \frac{1}{3}\left(a_1+a_2+\sqrt{a_1a_2}\right) - \sqrt[3]{a_1a_2\sqrt{a_1a_2}} \\
&= \frac{1}{3}\left(a_1+a_2+(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}\right) - \left(a_1a_2\left(a_1a_2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\left(a_1+a_2+(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}\right) - \left(a_1^{\frac{3}{2}}a_2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3}\left(a_1+a_2+(a_1a_2)^{\frac{1}{2}}\right) - (a_1a_2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{a_1+a_2}{2} - \sqrt{a_1a_2}\right)
\end{aligned}
$$

2 個の場合の (相加平均) $\geq$ (相乗平均) より $F\left(\sqrt{a_1a_2}\right) \geq 0$ となり式が成立する。

(4)　一般の n について不等式を証明するのだが，(3) を見てみると，$n=3$ の証明のとき，$n=2$ の結果を必要としている。そこで，数学的帰納法で証明する。すなわち

$$
\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1a_2\cdots a_{n-1}}
$$

を仮定して

$$
\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}
$$

を証明する。

$F(x) = \dfrac{a_1+\cdots+a_{n-1}+x}{n} - \sqrt[n]{a_1\cdots a_{n-1}x}$ とおく。

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\left(a_1\cdots a_{n-1}x\right)^{\frac{1}{n}-1}\left(a_1\cdots a_{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{a_1\cdots a_{n-1}}{\left(a_1\cdots a_{n-1}x\right)^{\frac{n-1}{n}}}\right)
\end{aligned}
$$

$F'(x)=0$ を解くと $x=(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$ となる。$x<(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$ のとき $F'(x)<0$，$x=(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$ のとき $F'(x)=0$，$x>(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$ のとき $F'(x)>0$ となるので $F(x)$ は $x=(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}$ で最小値をとる。

$$
\begin{aligned}
F\left((a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\right) &= \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}+(a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}{n} - \left(a_1\cdots a_{n-1}\left(a_1\cdots a_{n-1}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{n-1}{n}\left(\frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1} - (a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\right)
\end{aligned}
$$

$n-1$ のときの仮定より $F\left((a_1\cdots a_{n-1})^{\frac{1}{n-1}}\right) \geq 0$ となり証明された。