数学序論問題解説 ♯15

河野

演習問題 6.1　次の定理は平均値の定理と呼ばれる。平均値の定理の成立を前提として命題 6.1 を証明せよ。

関数 f が $[\,a,\,b\,]$ で連続であり，$(\,a,\,b\,)$ で微分可能であるとする。このときある実数 c で $a<c<b$ かつ

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を満たすものが存在する。

最初に，$H(x)$ がある区間 $[\,a,\,b\,]$ で恒等的に $H'(x)=0$ ならば $H(x)$ は定数関数であることを示す。区間中の任意の x $(x>a)$ を考える。$[a,x]$ として平均値の定理を適用すると，ある c で $a<c<x$ かつ

$$H'(c)=\frac{H(x)-H(a)}{x-a}$$

を満たすものが存在する。$H'(c)=0$ なので $H(x)=H(a)$ が成立する。$x=a$ のときは $H(x)=H(a)$ である。よって任意の x に対し $H(x)=H(a)$ が成立するので，$H(x)$ は定数関数である。

次に命題 6.1 を証明する。$H(x)=G(x)-F(x)$ とおくと $H'(x)=G'(x)-F'(x)$ より $H'(x)=0$ となる。よって $H(x)$ は定数関数である。これを $H(x)=C$ とおく。このとき $G(x)-F(x)=H(x)=C$ なので $G(x)=F(x)+C$ が成立する。

演習問題 6.2　命題 6.2 及び命題 6.3 を証明せよ。

命題 6.2 (1) はすでに示してあるので (2) を示す。$F'(x)=f(x)$ とおくと $F(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx$ である。$(aF(x))'=aF'(x)=af(x)$ なので

$$\int af(x)\,dx=aF(x)=a\int f(x)\,dx$$

となる。

命題 6.3 は微分法で学んだ関数の導関数と積分の定義から出てくる。即ち

$$\int f(x)\,dx=F(x)$$

を示すためには

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$

を示せばよい。

(1) は要綱に書いてある。(2) は演習問題 5.15 を参考にすると，$(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$ が成立することから従う。(3)–(8) はそれぞれ $(\sin x)'=\cos x$，$(-\cos x)'=\sin x$，$(e^x)'=e^x$，$\left(\dfrac{a^x}{\log a}\right)'=\dfrac{1}{\log a}\log a\,a^x=a^x$，$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ から結論が得られる。

演習問題 6.3　次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $(2x+5)^6$　(2) e^{-2x}　(3) $\sin\dfrac{x}{2}$　(4) $x(3x^2+1)^8$

(5) $\dfrac{x}{(1+x^2)^3}$　(6) xe^{3x}　(7) x^2e^{3x}　(8) $\dfrac{1}{\tan x}$

(9) $x\sin x$　(10) $x^2\cos x$　(11) $x^3\log x$　(12) $(\log x)^2$

(13) $\arctan x$　(14) $\arcsin x$　(15) $e^x\sin x$　(16) $e^x\cos x$

(1)　置換積分法を使う。$t=2x+5$ と置くと $\dfrac{dt}{dx}=2$ より $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\dfrac{dt}{dx}}=\dfrac{1}{2}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int(2x+5)^6\,dx &= \int t^6\frac{dx}{dt}\,dt=\int t^6\frac{1}{2}\,dt\\ &= \frac{1}{2\cdot 7}t^7=\frac{1}{14}(2x+5)^7\end{aligned}$$

(2)　$t=-2x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=-2$ より $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\dfrac{dt}{dx}}=-\dfrac{1}{2}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int e^{-2x}\,dx &= \int e^t\frac{dx}{dt}\,dt=-\frac{1}{2}\int e^t\,dt\\ &= -\frac{1}{2}e^t=-\frac{1}{2}e^{-2x}\end{aligned}$$

(3)　$t=\dfrac{x}{2}$ とおくと，$x=2t$ より $\dfrac{dx}{dt}=2$ となる。よって

$$\int\sin\frac{x}{2}\,dx = \int\sin t\frac{dx}{dt}\,dt=-2\cos t=-2\cos\frac{x}{2}$$

となる。

(4)　$t=3x^2+1$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=6x$ より $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\dfrac{dt}{dx}}=\dfrac{1}{6x}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int x(3x^2+1)^8\,dx &= \int xt^8\frac{1}{6x}\,dt=\frac{1}{6}\int t^8\,dt\\ &= \frac{1}{6}\frac{1}{9}t^9=\frac{1}{54}(3x^2+1)^9\end{aligned}$$

(5)　$t=1+x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2x$ より $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\dfrac{dt}{dx}}=\dfrac{1}{2x}$ となる。よって

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{(1+x^2)^3}\,dx &= \int\frac{x}{t^3}\frac{1}{2x}\,dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^3}\,dt\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-2}=-\frac{1}{4(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

ここから部分積分法の問題がでてくる。部分積分法は

$$\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx$$

というものであった。

(6)　$g = x$，$f' = e^{3x}$ とおくと

$$f = \int f'\,dx = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$

なので

$$\begin{aligned}\int xe^{3x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{3}e^{3x}\right)' x\,dx = \int f'g\,dx \\ &= fg - \int fg'\,dx \\ &= \frac{x}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x}\,dx = \frac{x}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\end{aligned}$$

(7)　$g = x^2$，$f' = e^{3x}$ とおくと

$$f = \int f'\,dx = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}$$

なので

$$\begin{aligned}\int x^2e^{3x}\,dx &= fg - \int fg'\,dx \\ &= \frac{x^2}{3}e^{3x} - \int 2x\frac{1}{3}e^{3x}\,dx\end{aligned}$$

ここでもう一度部分積分を実行すると

$$= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27}\right)e^{3x}$$

(8)　$\dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{(\sin x)'}{\sin x}$ なので $t = \sin x$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = \cos x$ より $dx = \dfrac{1}{\cos x}dt$ と変形すると

$$\int \frac{1}{\tan x}\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\cos x}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| = \log|\sin x|$$

(9)　$g = x$，$f' = \sin x$ とおくと $f = \displaystyle\int f'\,dx = \int \sin x\,dx = -\cos x$ なので

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= fg - \int fg'\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x\end{aligned}$$

(10) $g=x^2$，$f'=\cos x$ とおくと $f=\int f'\,dx=\int \cos x\,dx=\sin x$ なので

$$\begin{aligned}\int x^2\cos x\,dx &= fg-\int fg'\,dx\\ &= x^2\sin x-\int 2x\sin x\,dx\\ &= x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx\end{aligned}$$

となる。部分積分をもう一度実行すると

$$\begin{aligned}&= x^2\sin x-2\left(-x\cos x+\sin x\right)\\ &= x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x\end{aligned}$$

(11) $f'=x^3$，$g=\log x$ とおくと $f=\dfrac{1}{4}x^4$ なので

$$\begin{aligned}\int x^3\log x\,dx &= fg-\int fg'\,dx\\ &= \frac{1}{4}x^4\log x-\int \frac{1}{4}x^4\frac{1}{x}\,dx\\ &= \frac{1}{4}x^4\log x-\frac{1}{4}\int x^3\,dx\\ &= \frac{1}{4}x^4\log x-\frac{1}{16}x^4\end{aligned}$$

(12) $f'=1$，$g=(\log x)^2$ とおくと $f=x$ なので

$$\begin{aligned}\int (\log x)^2\,dx &= fg-\int fg'\,dx\\ &= x(\log x)^2-\int x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= x(\log x)^2-2\int \log x\,dx\\ &= x(\log x)^2-2x\log x+2x\end{aligned}$$

となる。計算には

$$\int \log x\,dx=x\log x-x$$

を用いた。

(13) $f'=1$，$g=\arctan x$ とおくと $f=x$，$g'=\dfrac{1}{1+x^2}$ なので

$$\begin{aligned}\int \arctan x\,dx &= fg-\int fg'\,dx\\ &= x\arctan x-\int \frac{x}{1+x^2}\,dx\end{aligned}$$

となる。ここで $t=1+x^2$ とおくと

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{x}{t}\frac{1}{2x}\,dt = \int \frac{1}{2}\frac{1}{t}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\log|t| = \frac{1}{2}\log|1+x^2| = \frac{1}{2}\log(1+x^2)\end{aligned}$$

なので

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

となる。

(14) $f'=1$, $g=\arcsin x$ とおくと $f=x$, $g'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ なので

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,dx &= fg - \int fg'\,dx \\ &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\end{aligned}$$

となる。ここで $t=1-x^2$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=-2x$ なので

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{x}{\sqrt{t}}\frac{1}{-2x}\,dt = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt \\ &= -\sqrt{t} = -\sqrt{1-x^2}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

(15) **(16)** 両方まとめて解く。$I=\displaystyle\int e^x\sin x\,dx, J=\int e^x\cos x\,dx$ とおく。$f'=e^x, g=\sin x$ とおくと

$$I = fg - \int fg'\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx = e^x\sin x - J$$

となる。一方 $f'=e^x, g=\cos x$ とおくと

$$J = fg - \int fg'\,dx = e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx = e^x\cos x + I$$

となる。2 式を連立されて解くと

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) \\ J &= \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)\end{aligned}$$