工業数学 II 要綱 #1　　　2007–10–5　　　河野

0　複素数と複素関数 (Introduction)

最初に複素数 (特に極形式) と複素関数に関して述べておく。

複素数とは実数 x, y を用いて

$$z = x + iy$$

の形に表される数である。幾何的には**ガウス平面** (**複素平面**) 上の点に対応する。$z = x + iy$ に対し $x - iy$ を z の**共役複素数**といい，$\overline{z}$ と書く。共役複素数は積・和を保存する，即ち次が成立する。

命題 0.1

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

複素数には極形式と呼ばれる表示方がある。この表示方法は積と相性がよい。$z = x + iy$ の原点までの距離を複素数 z の**絶対値**といい，$|z|$ で表す。また半直線 Oz が実軸となす角を**偏角**といい，$\arg z$ で表す。$\theta = \arg z$ と置くと，$x = |z| \cos\theta$, $y = |z| \sin\theta$ となるので,

$$z = |z|(\cos\theta + \sin\theta)$$

と表す事ができる。この形を**極形式**と言う。

ここでオイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

を用いると

$$z = |z| e^{i\theta}$$

となる。

命題 0.2

(1) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(2) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

我々が扱う関数は，独立変数・従属変数ともに複素数である**複素関数**である。複素関数は次の様に考えると，2 個の 2 変数実関数と同等である事が分かる。

複素関数 $w = f(z)$ が与えられているとき，$w = u + iv$ と表示する (ただし u, v は実数)。u, v は $z = x + iy$ で決定されるので，x, y を独立変数とする関数と見る事ができる。つまり $u = u(x, y)$,$v = v(x, y)$ と考える。

逆に 2 個の 2 変数実関数 $u(x, y), v(x, y)$ が与えられているとき，$w = u(x, y) + iv(x, y)$ を $z = x + iy$ を独立変数とする複素関数と見て，$w = f(z)$ が定義されていると考える事ができる。

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

複素関数は実関数の組と考えると実数 2 個の組から実数 2 個の組への写像であるので，グラフを書こうとすると (実)4 次元必要になる。そこで z–平面の格子が w–平面にどう写るか，または w–平面の格子に写るのは z–平面のどの様な図形かを見る。いくつか例をみよう。格子とは $a, b \in \mathbb{Z}$ としたとき $Y_b = \{\, x + ib \mid x \in \mathbb{R}\,\}$, $T_a = \{\, a + iy \mid y \in \mathbb{R}\,\}$ をいう。

例 0.3 (1) $w = z^2$ を考える。$z = x + iy$ であるので，$z^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$。よって $u = x^2 - y^2, v = 2xy$ となる。Y_b の移り先を見る。$u = x^2 - b^2$,$v = 2bx$ である。$b = 0$ のときは $v = 0, u = x^2$。$b \neq 0$ のときは $u = \left(\dfrac{v}{2b}\right)^2 - b^2$ となる。T_a の移り先は，$u = a^2 - y^2, v = 2ay$ なので，$a = 0$ のときは $v = 0$, $u = -y^2$, $a \neq 0$ のときは $u = a^2 - \left(\dfrac{v}{2a}\right)^2$ となる。ここで 1 つ注意しておく。$\boldsymbol{v} = (u, v) = (x^2 - y^2, 2xy)$ と置く。$\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} = (2x, 2y)$, $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} = (-2y, 2x)$ なので $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} = 0$ つまりこれらの曲線は直交している。格子に写る図形は $x^2 - y^2 = u$ または $2xy = v$ である。これらはいずれも双曲線である。

(2) $w = \alpha z$ を考える。$\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$，$z = |z| e^{i\theta}$ とおくと $w = |\alpha|\, |z| e^{i(\varphi + \theta)}$ となる。よってこの写像は平面を φ 回転した後全体を $|\alpha|$ 倍した写像になっている。

(3) $w = \dfrac{1}{z}$ を考える。$w = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z} z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$ なので $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, v = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}$ となっている。Y_b の移り先を見る。$b = 0$ のときは $u = \dfrac{1}{x}, v = 0$ となるので原点を除く u–軸に移る。$b \neq 0$ のときは $u = \dfrac{x}{x^2 + b^2}, v = -\dfrac{b}{x^2 + b^2}$ なので

$$
\begin{aligned}
u^2 + v^2 &= \frac{x^2}{(x^2 + b^2)^2} + \frac{b^2}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{x^2 + b^2}{(x^2 + b^2)^2} \\
&= \frac{1}{x^2 + b^2} = -\frac{v}{b}
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
u^2 + \left(v - \frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{1}{(2b)^2}
$$

となる。次に T_a の移り先を見る。$a = 0$ のときは $u = 0, v = -\dfrac{1}{y}$ となるので原点を除く v–軸に移る。$a \neq 0$ のときは $u = \dfrac{a}{a^2 + y^2}, v = -\dfrac{y}{a^2 + y^2}$ なので

$$
\begin{aligned}
u^2 + v^2 &= \frac{a^2}{(a^2 + y^2)^2} + \frac{y^2}{(a^2 + y^2)^2} = \frac{a^2 + y^2}{(a^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{1}{a^2 + y^2} = \frac{u}{a}
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
\left(u - \frac{1}{2a}\right)^2 + v^2 + = \frac{1}{(2a)^2}
$$

となる。

次に代表的な複素関数を紹介する。

整関数：多項式で与えられる関数を整関数と言う。多項式とは $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ の形のものをいう。ただし a_i は複素数。

有理関数：有理式で与えられる関数の事。ここで有理式とは $P(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ の形のもの，ただし $f(z),\ g(z)$ は多項式で，$g(z)$ は恒等的に 0 ではないものとする。分母が 0 になる所では定義されない。

指数関数：すでに紹介した実数に関する指数関数のテーラー展開

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

の x に複素数を代入する事により定義される関数。

実関数としての指数関数は 3 角関数と違い周期を持たなかったが，複素関数としての指数関数は周期を持っていることに注意。つまり $z = x + iy$ と置くとき $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ なので，指数関数 $w = f(z) = e^z$ は $f(x + iy + i2\pi) = f(x + iy)$ となり周期 $2\pi i$ を持っている。$w = u + iv$ とすると，$u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$ となる。

3 角関数：オイラーの公式 $e^x = \cos x + i \sin x$ から $e^{-x} = \cos(-x) + i \sin(-x)$
$= \cos x - i \sin x$ を用いて

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

を得る。x に複素数を代入する事により複素関数としての 3 角関数が得られる。この複素関数としての 3 角関数は実関数としての 3 角関数のいくつかの性質を失っている事に注意。例えば $|\cos z| \leqq 1$ などは成立しない。

次の 2 つの関数は少し注意が必要である。定義可能な全域で定義しようとすると，多価関数になってしまう。

冪乗根：$z = w^2$ の「逆関数」として $w = f(z) = \sqrt{z}$ を考えよう。この議論は 3 乗根等でも同様にできる。実関数の場合は定義域を 0 以上に制限する事に $y = \sqrt{x}$ が定義された。今複素関数としても $w = f(z) = \sqrt{z}$ が全平面で定義されているとしよう。$f(1) = 1$ が成立しているとする。$1 = e^{i0}$ と考え，1 を出発点に，$z = e^{i\theta}$ に沿って θ を大きくして行く。このとき $w = e^{i\theta/2}$ なので，円を一回りしたとき，つまり $\theta = 2\pi$ となったとき $w = e^{i\pi} = -1$ となっている。つまりこのとき $f(1) = -1$ となる。最初に $f(1) = 1$ と仮定したのでこれは矛盾である。

以上の議論は「全平面で定義される事」と「関数値が一意的に定まる事」の両方同時には成立しない事を意味している。そこで冪乗根関数を考えるときは次のいずれかの制限をつける。1 つの立場は全平面で定義されているが値がたくさんある「多価関数」と考える立場である。この場合 $f(1) = \{1, -1\}$ と 2 つの値をとると考える。もう 1 つは定義域を制限する立場である。例えば $\mathbb{C} - \{\, x + iy \mid y < 0 \,\}$ で定義されていると考えると，1 つの値が定まる。この場合 $f(1) = 1$ を採用するか $f(1) = -1$ を採用するか，2 つの選択がある。どちらでも構わないが通常 $f(1) = 1$ を選択する。

対数関数：対数関数は実関数の場合と同様に，指数関数の逆関数として定義される。しかしこの場合も冪根と同様に，多値 (しかも無限多値) が生じる。

$z = e^w$ とし，$z = re^{i\theta}$ とすると，$z = e^{\log r} e^{i\theta} = e^{\log r + i\theta}$ となるので，

$$w = \log z = \log |z| + i \arg z$$

となる。単位円の周りを 1 回廻ると偏角は 2π だけ増える。つまり最初 $w = f(z) = \log z$ を $f(1) = 0$ と決めておいても，一回りすると $f(1) = 2\pi i$ となってしまう。

対数関数に関しても「無限多値関数」と考えるか，$\mathbb{C} - \{\, x + iy \mid y < 0 \,\}$ で定義された関数と考えるかの 2 つの立場がある。後者の場合通常 $f(1) = 0$ となる様に関数の値を選ぶ。