工業数学 II 要綱 #2　　2007–10–12　　河野

1 ローラン展開

実関数では微分可能であってもその導関数が微分できるかどうかは分からなかった。また無限回微分可能でもテーラー級数に展開できない関数も存在した。しかし複素関数の場合，正則性 (微分可能性) からテーラー級数展開可能が従う。複素関数ではある領域で微分可能な関数を**正則関数**という。微分可能の定義は実数の場合と全く同じであるが一応書いておく。

定義 1.1 ある領域 D で定義された関数 $w = f(z)$ を考える。

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が収束するとき $w = f(z)$ は z で**微分可能**であるという。ある領域で定義された関数 $w = f(z)$ が定義域の各点で微分可能なとき，$w = f(z)$ は D で**正則**であるという。また $w = f(z)$ を**正則関数**という。

定理 1.2 複素関数 $w = f(z)$ がある領域で正則とする。このとき D 内の任意の点 a において $w = f(z)$ がテーラー級数展開可能である。即ち，ある正数 r が存在して，$|z - a| < r$ であれば，

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

と表すことが出来る。このとき $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ となる。

実数の場合と同様に次の級数展開が成り立つ。

(1) $e^z = 1 + \dfrac{1}{1!} z + \dfrac{1}{2!} z^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!} z^n + \cdots$

(2) $\sin z = z - \dfrac{1}{3!} z^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{1}{(2n-1)!} z^{2n-1} + \cdots$

(3) $\cos z = 1 - \dfrac{1}{2!} z^2 + \cdots + (-1)^n \dfrac{1}{(2n)!} z^{2n} + \cdots$

(4) $\log(1+z) = z - \dfrac{1}{2} z^2 + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n} z^n + \cdots$

(5) $(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} z^n + \cdots$

ただし，(1),(2),(3) においては $r = \infty$，(4),(5) では $r = 1$ である。(4) では $\log 1 = 0$ となる分岐を，(5) では $1^\alpha = 1$ となる分岐をとっている。(5) の特別な場合であるが次もよく用いられる級数である。

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots \qquad (|z| < 1) \\ \frac{1}{1+z} &= 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots \qquad (|z| < 1) \end{aligned}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

いくつかの関数のテーラー級数を求めてみよう。定理 1.2 を用いて $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(z)$ を求める方法もあるが，他の方法もある。どの様な方法にせよ

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

が得られたときはそれが一意的で Taylor 級数になる。

(1) 定理 1.2 を用いる方法で，$w = f(z) = \sin z$ を $z = \dfrac{\pi}{2}$ の周りでテーラー展開する。$f'(z) = \cos z$，$f''(z) = -\sin z$，$f'''(z) = -\cos z$ $f^{(4)}(z) = \sin z$，$f^{(5)}(z) = \cos z$ 以下周期 4 でこれを繰り返す。$f(\dfrac{\pi}{2}) = 1$，$f'(\dfrac{\pi}{2}) = 0$，$f''(\dfrac{\pi}{2}) = -1$，$f'''(z) = 0$，$f^{(4)}(\dfrac{\pi}{2}) = 1 \cdots$ なので

$$\begin{aligned}\sin z &= 1 + \frac{1}{1!} 0 \left(z - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2!}(-1)\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} 0 \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{4!} 1 \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n} + \cdots\end{aligned}$$

となる。

(2) 次に同じ問題を $\cos z$ の原点におけるテーラー展開を用いて解く。加法定理は複素数でも成立する (実数で成立する代数的な式は複素数でも成立すると考えてよい)，ので

$$\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \cos\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin z \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin z$$

が成立する。ここで

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!} z^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n} + \cdots$$

より

$$\begin{aligned}\sin z &= \cos\left(z - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2!}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^{2n} + \cdots\end{aligned}$$

となる。

(3) 次に

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \cdots$$

を示そう。等比数列の和を考えることにより

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}$$

が成立する。ここで $|z| < 1$ を仮定すると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ なので

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z}$$

が成立する。z に $-z$ を代入することにより

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z} &= \frac{1}{1-(-z)} = 1 + (-z) + (-z)^2 + \cdots + (-z)^n + \cdots \\ &= 1 - z + z^2 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots\end{aligned}$$

が得られる。この式の z に z^2 を代入することにより

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 + \cdots + (-1)^n z^{2n} + \cdots$$

を得る。この式を定理 1.2 を用いて計算するのは大変かもしれない。

演習問題 1.1　次の関数を与えられた点でテーラー級数展開せよ。

(1) $e^z \quad (z=1)$　　(2) $\dfrac{1}{1-z^2} \quad (z=0)$

(3) $\dfrac{1}{(z+1)z} \quad (z=1)$　　(4) $\dfrac{1}{(z^2+1)z} \quad (z=1)$

(5) $\sin z \quad (z=\pi)$　　(6) $z^2\cos(z) \quad (z=0)$

(7) $e^{z^2} \quad (z=0)$　　(8) $\sin(2z^2) \quad (z=0)$

正則でない点 (**特異点**と呼ぶ) があってもそれが孤立して存在しているときは (その様な点を**孤立特異点**と呼ぶ), テーラー展開は出来ないが負巾も含めると「級数」展開できる。それを**ローラン展開**と呼ぶ。

定理 1.3 $w=f(z)$ がある点 a を中心とする半径 ρ_1 と ρ_2 $(0<\rho_1<\rho_2)$ の 2 つの同心円 C_1, C_2 にはさまれる円環領域正則であるとする。このとき点 $\rho_1 < |z-a| < \rho_2$ において

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \\ &= \cdots + \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} \\ &\quad + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

と展開される。

$f(z)$ が 1 点 a を除いて正則なとき同じようにローラン展開できる。このローラン展開を a の周りのローラン展開という言い方をすることもある。

いくつかの関数をローラン展開しよう。

(1)　$f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ を $z=0$ の周りでローラン展開しよう。$\sin z$ をテーラー展開すると

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}z^{2n-1} + \cdots$$

なので

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!}z^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}z^{2n-3} + \cdots$$

となる。

(2)

$cos\dfrac{1}{z}$ を $z=0$ の周りでローラン展開する。

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!}z^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}z^{2n} + \cdots$$

なので

$$\cos\frac{1}{z}=1-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{z^{2n}}+\cdots$$

となる。

(3) $w=\dfrac{7z-2}{z(z+1)(z-2)}$ を次の領域でそれぞれローラン展開する。

$$(1)\ 0<|z+1|<1 \quad (2)\ 1<|z+1|<3 \quad (3)\ 3<|z+1|$$

$w=\dfrac{-3}{z+1}+\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{z-2}$ となるので $\dfrac{1}{z}$ と $\dfrac{2}{z-2}$ を $z+1$ のべきに展開すればよい。$|z+1|<1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= -\frac{1}{1-(z+1)}=-\left(1+(z+1)+\cdots+(z+1)^n+\cdots\right)\\ &= -1-(z+1)-\cdots-(z+1)^n-\cdots \qquad (|z+1|<1)\end{aligned}$$

となる。この級数は $|z+1|>1$ では収束しない。$\left|\dfrac{1}{z+1}\right|<1$ なので $\dfrac{1}{z+1}$ が出てくるように変形する。このとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{(z+1)-1}=\frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\dfrac{1}{z+1}}\\ &= \frac{1}{z+1}\left(1+\left(\frac{1}{z+1}\right)+\left(\frac{1}{z+1}\right)^2+\cdots\left(\frac{1}{z+1}\right)^n+\cdots\right)\\ &= \frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(z+1)^n}+\cdots \qquad (|z+1|>1)\end{aligned}$$

となる。$|z+1|<3$ のときは $\left|\dfrac{z+1}{3}\right|<1$ なので $\dfrac{z+1}{3}$ が出てくるように変形する。

$$\begin{aligned}\frac{2}{z-2} &= \frac{-2}{3-(z+1)}=-\frac{2}{3}\frac{1}{1-\dfrac{z+1}{3}}\\ &= -\frac{2}{3}\left(1+\frac{z+1}{3}+\cdots+\left(\frac{z+1}{3}\right)^n+\cdots\right)\end{aligned}$$

でありまた $|z+1|>3$ のときは $\left|\dfrac{3}{z+1}\right|<1$ なので $\dfrac{3}{z+1}$ が出てくるように変形する。

$$\begin{aligned}\frac{2}{z-2} &= \frac{2}{z+1-3}=\frac{2}{z+1}\frac{1}{1-\dfrac{3}{z+1}}\\ &= \frac{2}{z+1}\left(1+\frac{3}{z+1}+\cdots+\left(\frac{3}{z+1}\right)^n+\cdots\right)\end{aligned}$$

となる。以上により

$$
\begin{aligned}
w &= -\frac{3}{z+1} - \frac{5}{3} - \left(1 + \frac{2}{3^2}\right)(z+1) + \cdots - \left(1 + \frac{2}{3^{n+1}}\right)(z+1)^n - \cdots \qquad (0 < |z+1| < 1) \\
&= \cdots - \frac{2}{3}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n + \cdots - \frac{2}{3} - \frac{2}{z+1} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{(z+1)^n} + \cdots \qquad (1 < |z+1| < 3) \\
&= \frac{1+2\cdot 3}{(z+1)^2} + \cdots + \frac{1+2\cdot 3^{n-1}}{(z+1)^n} + \cdots \qquad (3 < |z+1|)
\end{aligned}
$$

演習問題 1.2　次の関数を与えられた点の周りまたは領域でローラン展開せよ。

(1) $e^{1/z}$ $\quad (z = 0)$

(2) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ $\quad (0 < |z-2| < 1)$

(3) $\dfrac{\cos z}{z^4}$ $\quad (z = 0)$

(4) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ $\quad (1 < |z-2|)$

(5) $\dfrac{1}{(z-1)z^2}$ $\quad (0 < |z| < 1)$

(6) $\sin\dfrac{1}{z}$ $\quad (0 < |z|)$

(7) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ $\quad (1 < |z-1|)$

(8) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ $\quad (0 < |z-2| < 1)$

(9) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ $\quad (1 < |z-2|)$

(10) $\dfrac{1}{\sin z}$ $\quad (0 < |z| < \pi)$