工業数学 II 要綱 #3

2007–11–16　　河野

2　留数定理

領域 D で定義された連続関数 $w = f(z)$ と，その内部にある向きが定められた曲線 C が与えられたとき複素積分

$$\int_C f(z)dz$$

が定義された。「向きが定められている」とは出発点 (その曲線の**始点**と呼ばれる) と到着点 (その曲線の**終点**と呼ばれる) が定まっていることをいう。元に曲線 C の始点と終点を入れ替えた曲線を向きを逆にした曲線といい，$-C$ で表す。曲線 C_1 の終点と曲線 C_2 の始点が等しいとき，2 つの曲線をつないだ曲線を $C_1 + C_2$ と書く。

定義 2.1 曲線 C の分割を $\Delta = \{ z_0, z_1 \dots . z_n \}$ とする。ただし z_0 が始点，z_n が終点だとする。このとき

$$\begin{aligned}\Sigma(\Delta) &= \sum_{j=1} f(z_j)(z_j - z_{j-1}) \\ &= f(z_1)(z_1 - z_0) + \cdots f(z_j)(z_j - z_{j-1}) + \cdots + f(z_n)(z_n - z_{n-1})\end{aligned}$$

とおく。$|\Delta| = \max \{ |z_j - z_{j-1}| \mid j = 1, \dots, n \}$ とおく，$\lim_{|\Delta| \to 0} \Sigma(\Delta)$ が収束するときその極限値を

$$\int_C f(z)dz$$

と書く。

曲線 C がパラメータを用いて

$$z = z(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$$

で与えられているとする。ただし $z(a)$ が始点，$z(b)$ が終点とする。このとき

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \frac{dz(t)}{dt} dt$$

が成立する。例を計算してみよう。

例 2.2 $w = f(z) = z^2$ とする。C を $z(t) = (1+i)t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$ とする。ただし $z(0)$ が始点だとする。$\dfrac{dz(t)}{dt} = (1+i)$ なので

$$\begin{aligned}\int_C z^2 dz &= \int_0^1 \Big((1+i)t\Big)^2 (1+i)dt \\ &= (1+i)^3 \int_0^1 t^2 dt = \frac{(1+i)^3}{3}\end{aligned}$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

となる。

曲線のパラメータ表示はいろいろある。複素積分はパラメータ表示によらず定まるが，一般的に示すことはしないが，この例でパラメータを変えて計算してみよう。

k を 2 以上の自然数とする。$z(t)=(1+i)t^k \quad (0 \leqq t \leqq 1)$ とおくと，これは C の前とは異なるパラメータ表示を与える。$\dfrac{dz(t)}{dt}=k(1+i)t^{k-1}$ なので

$$\begin{aligned}\int_C z^2dz &= \int_0^1 \left((1+i)t^k\right)^2 k(1+i)t^{k-1}dt \\ &= (1+i)^3\int_0^1 kt^{3k-1}dt = (1+i)^3k\left[\frac{1}{3k}t^{3k}\right]_{t=0}^1 = \frac{(1+i)^3}{3}\end{aligned}$$

演習問題 2.1　次の積分を求めよ。ただし $n \geqq 2$，$0 \leqq t \leqq 1$ とし，$t=0$ に対応する点が始点とする。

(1) $\displaystyle\int_C zdz, \quad C: z(t)=t+t^2i$

(2) $\displaystyle\int_C (1+z)^2dz, \quad C: z(t)=ti$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-a}dz, \quad C: z(t)=a+re^{2\pi it}$

(4) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-a}dz, \quad C: z(t)=a+re^{-2\pi it}$

(5) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-a)^n}dz, \quad C: z(t)=a+re^{2\pi it}$

命題 2.3 複素積分に関して次が成立する。

$$\int_C f(z)+g(z)dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$$

$$\int_C af(z)dz = a\int_C f(z)dz$$

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

曲線が自分自身と再び交わることがないとき，C を**単一曲線**という。始点と終点が一致している曲線を**閉曲線**という。単一閉曲線に対する**向き**は，特に断らない場合は，内部の領域を左に見る方向とする。次の定理は複素解析の基本定理とも言える重要な定理である。

定理 2.4 [**コーシーの積分定理**] 関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C 上とその内部で正則とすれば，

$$\int_C f(z)dz = 0$$

が成立する。

系 2.5 単一閉曲線 C の内部に，お互いに交わらない n 個の単一閉曲線 $C_1, C_2, \ldots, C_n$ がある。$C_1, C_2, \ldots, C_n$ の内部を除いて C 上およびその内部で正則とすれば，

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \sum_{j=1}^n \int_{C_j} f(z)dz \\ &= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz\end{aligned}$$

が成立する。

次はコーシーの積分公式と呼ばれることもある。コーシーの積分定理から導かれる。

定理 2.6 [**コーシーの積分表示**] 関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C 上とその内部で正則とする。a が C の内部にあれば,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

が成立する。

また自然数 n に対し

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

が成立する。

例 2.7 定理 2.4, 定理 2.6 を用いて積分を求めることができる場合がある。例を考えよう。

(1) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{2z-1}dz$ を求める。ただし, 円 C は $|z|=1$ とする。

$\displaystyle\frac{e^z}{2z-1} = \frac{1}{z-\frac{1}{2}}\frac{e^z}{2}$ と変形して $f(z) = \dfrac{e^z}{2}$ とおくと $f(z)$ は C 上およびその内部で正則である。また $\dfrac{1}{2}$ は C の内部にある。定理 2.6 より

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\frac{1}{2}}dz$$

が成立する。よって

$$\begin{aligned}\int_C \frac{e^z}{2z-1}dz &= 2\pi i f\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= 2\pi i\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} = \pi i e^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

である。

(2) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{2z-3}dz$ を求める。ただし, 円 C は $|z|=1$ とする。

$2z-3=0$ となるのは $z=\dfrac{3}{2}$ のときであり, 今の場合 $\dfrac{e^z}{2z-3}$ は C 上およびその内部で正則である。よってコーシーの積分定理 (定理 2.4) より

$$\int_C \frac{e^z}{2z-3}dz = 0$$

である。

(3) $\displaystyle\int_C \frac{z^2+2z}{(z-1)^2}dz$ を求める。ただし, 円 C は $|z|=2$ とする。

$z=1$ は円 C の内部にある。$f(z)=z^2+2z$ とおくと

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

より

$$f'(1) = \frac{1!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-1)^{1+1}}dz$$

が成立する。$f'(z)=2z+2$ なので

$$\begin{aligned}\int_C \frac{z^2+2z}{(z-1)^2}dz &= 2\pi i f'(1)\\ &= 2\pi i\big(2+2\big)=8\pi i\end{aligned}$$

である。

演習問題 2.2　次の積分を求めよ。ただし，円 C は $|z-1|=3$ とする。

(1) $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{z+i}dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{\cos\pi z}{z+1}dz$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{z}{(z-1)(z-3i)}dz$　　(4) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}dz$

(5) $\displaystyle\int_C \frac{z^2+4}{z^3}dz$

定義 2.8 関数 $f(z)$ が点 a において正則でないとき，a を $f(z)$ の**特異点** (*singular point*) というが，特に a のある近傍で a を除いて正則であるとき**孤立特異点** (*isolated singular point*) という。

a が $f(z)$ の孤立特異点のとき，ある ρ が存在して $0<|z-a|<\rho$ で

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n\\ &= \cdots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\cdots+a_n(z-a)^n+\cdots\end{aligned}$$

とローラン展開可能である。このとき $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$ を**主要部** (*principal part*) と呼ぶが，次の 3 つの場合に分かれる。

(1) [**主要部がない場合**]　この場合関数は

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+\cdots+a_n(z-a)^n+\cdots$$

とテーラー級数展開されている。このとき a を**除去可能な特異点** (*removable singular point*) と呼ぶ。

(2) [**主要部が有限の場合**]　関数は

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=1}^{k}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n\\ &= \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}+\cdots+a_0+a_1(z-a)+\cdots+a_n(z-a)^n+\cdots\end{aligned}$$

と展開されている。このとき a を k 位の**極** (*pole*) と呼ぶ。

(3) [**主要部が無限の場合**]　このとき関数は

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n\\ &= \cdots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\cdots+a_n(z-a)^n+\cdots\end{aligned}$$

となっており，$a_{-n} \neq 0$ となる n が無限に存在する。このとき a を**真性特異点** (*essential singular point*) と呼ぶ。

例 2.9 (1) 関数 $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ は 0 で正則でない。0 以外は正則なので 0 は孤立特異点である。$\sin z$ の 0 におけるテーラー展開は

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}z^{2n-1} + \cdots$$

なので $z = 0$ におけるローラン展開は

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}z^{2n-2} + \cdots$$

となるので主要部はない。よって a は除去可能な特異点である。このとき $\displaystyle\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$ なので $f(0) = 1$ と定義すると，$f(z)$ は全平面で正則な関数となる。

(2) 関数 $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$ は 0 で正則でない。0 以外は正則なので 0 は孤立特異点である。e^z の 0 におけるテーラー展開は

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots$$

なので $z = 0$ におけるローラン展開は

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}z \cdots + \frac{1}{n!}z^{n-2} + \cdots$$

となるので主要部は

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$$

である。a は 2 位の極である。

(3) 関数 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ は 0 で正則でない。0 以外は正則なので 0 は孤立特異点である。e^z の 0 におけるテーラー展開は

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots$$

なので $z = 0$ におけるローラン展開は

$$e^{\frac{1}{z}} = \cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots + \frac{1}{z} + 1$$

となるので主要部は

$$\cdots + \frac{1}{n!z^n} + \cdots + \frac{1}{z}$$

である。a は真性特異点である。

関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C の内部で点 a を除いて正則であるとする。このとき $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を計算する。a が孤立特異点なのである ρ が存在して $0 < |z-a| < \rho$ では

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

となっている。C_1 を a を中心とする半径 ρ の円とすると系 2.5 より $\displaystyle\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz$ となる。

$$\begin{aligned}\int_{C_1} f(z)dz &= \int_{C_1}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n\right\}dz \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}\int_{C_1}\frac{1}{(z-a)^n}dz + \sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{C_1}(z-a)^n dz\end{aligned}$$

となるが,

$$\int_{C_1}(z-a)^n dz = 0, \quad \int_{C_1}\frac{1}{(z-a)^n}dz = 0\ (n \neq 1), \quad \int_{C_1}\frac{1}{z-a}dz = 2\pi i$$

より

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$$

となる。ローラン展開の -1 次の項の係数は重要であることが分かるので名前をつける。a が孤立特異点のときローラン展開の -1 次の項の係数 a_{-1} を $f(z)$ の a における**留数** (*residue*) といい, $\mathrm{Res}(f,a)$ と書く。$f(z)$ が明らかな場合は省略して $\mathrm{Res}(a)$ とも書く。

例 2.9 でいうと

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\sin z}{z}, 0\right) = 0, \quad \mathrm{Res}\left(\frac{e^z}{z^2}, 0\right) = 1, \quad \mathrm{Res}\left(e^{\frac{1}{z}}, 0\right) = 1$$

である。

次の定理は系 2.5 からすぐ従うが，応用上重要な定理である。

定理 2.10 [**留数定理**] 単一閉曲線 C 上およびその内部で C の内部にある点 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を除いて $f(z)$ が正則であれば,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f, a_j) \\ &= 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, a_1) + \cdots + 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, a_n)\end{aligned}$$

が成立する。

留数定理 (定理 2.10) を用いて積分を計算するためには留数を求めればよい。留数はその点でローラン展開すれば求まるが，極の場合にはローラン展開しなくても求めることができる。

命題 2.11 点 a が関数 $f(z)$ の 1 位の極であれば

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

である。点 a が関数 $f(z)$ の k 位の極であれば

$$\mathrm{Res}(f,a) = \lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Big((z-a)^k f(z)\Big)$$

である。

例 2.12 (1) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)^2}$ とするとき $I = \displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよう。ただし C は $|z| = 3$ とする。分母が 0 になるのは，$z^2+4=0$ となるとき。よって特異点は $z=2i$ および $z=-2i$ である。いずれも C の内部にある。よって

$$I = \int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(2i) + 2\pi i \operatorname{Res}(-2i)$$

が成立する。

$$f(z) = \frac{1}{(z-2i)^2(z+2i)^2} = \frac{1}{(z-2i)^2}\frac{1}{(z+2i)^2} \tag{1}$$

となり，$\dfrac{1}{(z+2i)^2}$ は $z=2i$ の近傍で正則なので，$z=2i$ は $f(z)$ の 2 位の極である。よって

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(2i) &= \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left((z-2i)^2 f(z)\right) = \lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+2i)^2}\right)\\ &= \lim_{z\to 2i}\frac{-2}{(z+2i)^3} = \frac{-2}{(4i)^3} = \frac{1}{32i}\end{aligned}$$

を得る。

$\dfrac{1}{(z-2i)^2}$ は $z=-2i$ の近傍で正則なので，式 (1) より $z=-2i$ は $f(z)$ の 2 位の極である。よって

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(-2i) &= \lim_{z\to +2i}\frac{d}{dz}\left((z+2i)^2 f(z)\right) = \lim_{z\to -2i}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-2i)^2}\right)\\ &= \lim_{z\to -2i}\frac{-2}{(z-2i)^3} = \frac{-2}{(-4i)^3} = \frac{1}{32i}\end{aligned}$$

を得る。

よって

$$\begin{aligned}I = \int_C f(z)dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(2i) + 2\pi i \operatorname{Res}(-2i)\\ &= 2\pi i\frac{1}{32i} + 2\pi i\frac{1}{32i} = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

(2) $f(z) = z^2\sin\dfrac{1}{z}$ とするとき $I = \displaystyle\int_C f(z)dz$ を求めよう。ただし C は $|z|=1$ とする。特異点は $z=0$ であり，C の内部にある。$\sin\dfrac{1}{z}$ を $z=0$ でローラン展開すると

$$\sin\frac{1}{z} = \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}} + \cdots - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z}$$

となるので $f(z)$ の $z=0$ におけるローラン展開は

$$z^2\sin\frac{1}{z} = \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n-1}} + \cdots - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + z$$

となる。留数はローラン展開の -1 次の項なので $\mathrm{Res}(0) = -\dfrac{1}{3!} = -\dfrac{1}{6}$ である。よって

$$I = \int_C f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(0) = \frac{\pi i}{3}$$

である。

演習問題 2.3　次の積分を求めよ。ただし，カッコの中は円 C を表すものとする。

(1) $\displaystyle\int_C \frac{ze^{\pi z}}{z^2+4}dz \quad (|z|=3)$

(2) $\displaystyle\int_C \frac{z+2}{z^2(z-4)}dz \quad (|z|=3)$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{(z-1)^2(z^2+1)}dz \quad (|z-i|=\sqrt{3})$

(4) $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^4-1}dz \quad (|z-i|=\sqrt{3})$

(5) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-3)(z-1)^2}dz \quad (|z-2|=2)$

(6) $\displaystyle\int_C z^3 e^{\frac{1}{z}}dz \quad (|z-1|=3)$

(7) $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z}dz \quad (|z|=1)$

(8) $\displaystyle\int_C z^4 \sin\frac{1}{z}dz \quad (|z|=2)$