工業数学 II 要綱 #4　　　　2008–1–25　　河野

3 実積分への応用

留数定理の応用として，複素積分を用いて実積分を計算することを考える。次の 2 つのタイプの積分を求めよう。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

(1) $z = e^{i\theta}$ とおくと

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

であり，オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \cos\theta, \quad \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \sin\theta$$

が成立する。

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$$

なので，z に関する複素積分に変換すると

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta &= \int_C f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{d\theta}{dz}dz \\ &= \int_C f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}dz \\ &= \frac{1}{i}\int_C f\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{z}dz\end{aligned}$$

となる。ただし，C は半径 1 の円である。

$\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\sin\theta}d\theta$ を計算しよう。
$z = e^{\theta}$ とおくと

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \cos\theta, \quad \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \sin\theta$$

このプリントも含め講義関連のプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html においてある。

なので

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin\theta}d\theta &= \frac{1}{i}\int_C \frac{1}{5+3\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}\frac{1}{z}dz \\
&= \int_C \frac{1}{5i+3\left(\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}\frac{1}{z}dz \\
&= \int_C \frac{2}{10i+3\left(z-\frac{1}{z}\right)}\frac{1}{z}dz \\
&= \int_C \frac{2}{10iz+3z^2-3}dz \\
&= \int_C \frac{2}{(3z+i)(z+3i)}dz
\end{aligned}
$$

となる。ただし，C は半径 1 の円である。$f(z) = \dfrac{2}{(3z+i)(z+3i)}$ の特異点は $z = -\dfrac{i}{3}$ および $z = -3i$ であるが，C の内部にある特異点は $z = -\dfrac{i}{3}$ のみである。$f(z) = \dfrac{1}{z+\frac{i}{3}}\dfrac{2}{3(z+3i)}$ と書けるので $\dfrac{2}{3(z+3i)}$ を $z = -\dfrac{i}{3}$ のまわりでテーラー展開すると

$$
\frac{2}{3(z+3i)} = -\frac{i}{4} + \frac{3}{32}\left(z+\frac{i}{3}\right) + \cdots
$$

となるので

$$
f(z) = -\frac{i}{4}\frac{1}{z+\frac{i}{3}} + \frac{3}{32} + \cdots
$$

とローラン展開できる。よって留数は

$$
\mathrm{Res}\left(-\frac{i}{3}\right) = -\frac{i}{4}
$$

となる。以上より

$$
\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+3\sin\theta}d\theta &= \int_C \frac{2}{(3z+i)(z+3i)}dz \\
&= 2\pi i\,\mathrm{Res}\left(-\frac{i}{3}\right) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

を得る。

(2) 議論の途中で必要になる長さによるパラメータ表示について復習する。

曲線 C のパラメータ表示には種々あるが，その中で長さによるパラメータ表示を考える。長さによるパラメータは通常変数に s を用いる。例えば C が $z(t) = (1+i)t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ とパラメータ

表示されているとする。

$$s=\int_0^t\left|\frac{dz(t)}{dt}\right|dt=\int_0^t\big|(1+i)\big|dt=\sqrt{2}\int_0^t dt=\sqrt{2}\,t$$

$s=\sqrt{2}\,t$ なので $t=\dfrac{s}{\sqrt{2}}$ となる。また $t=0$ のとき $s=0$，$t=1$ のとき $=\sqrt{2}(1+i)$ である。
$u(s)=z(t(s))=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}s$ なので C は

$$C:u(s)=\frac{1+i}{\sqrt{2}}s,\quad 0\leqq s\leqq\sqrt{2}(1+i)$$

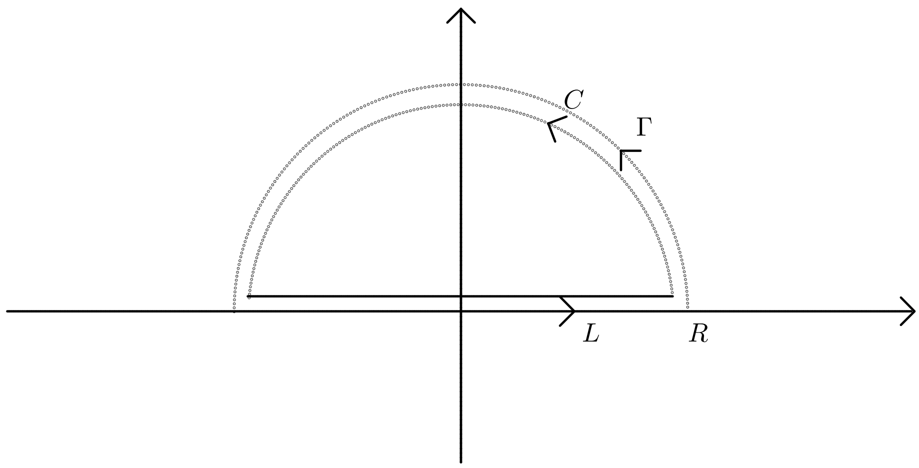
と長さ s によりパラメータ表示される。

曲線 C が $z(s)\,(0\leqq s\leqq a)$ と長さによりパラメータ表示されているとき

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\leqq\int_C\big|f(z)\big|ds$$

が成立する。この式は複素積分の大きさを評価するとき重要な式である。

$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$ を求めよう。下図の半径 R の半円を Γ とする。ただし $R>1$ とする。
$L=\{\,x+0i\mid -R\leqq x\leqq R\,\}$ とおき，$C=\Gamma\cup L$ とする。ただし向きは下図のようだとする。



$f(z)=\dfrac{1}{z^4+1}$ とおく。分母が 0，即ち $z^4=-1$ となるのは

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad z_2=e^{i\frac{3\pi}{4}}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}},\quad z_3=e^{i\frac{5\pi}{4}}=\frac{-1-i}{\sqrt{2}},\quad z_4=e^{i\frac{7\pi}{4}}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

である。この 4 点が $f(z)$ の特異点である。このうち C の内部にあるのは z_1 と z_2 である。

$$f(z)=\frac{1}{z^4+1}=\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

なので $g(z)=\dfrac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$ とおく。$g(z)$ を $z=z_1$ のまわりでテーラー展開すると

$$g(z)=-\sqrt{2}\frac{1+i}{8}+\frac{3}{8}(z-z_1)+5\sqrt{2}\frac{-1+i}{32}(z-z_1)^2+\cdots$$

となる。$f(z)$ を $z=z_1$ のまわりでローラン展開すると

$$f(z) = -\sqrt{2}\frac{1+i}{8}\frac{1}{z-z_1} + \frac{3}{8} + 5\sqrt{2}\frac{-1+i}{32}(z-z_1) + \cdots$$

となる。

$g(z)$ のテーラー展開を求めるとき定数項は $g(z_1)$ である (実際に必要なのは定数項だけである)。これを求めるのに，直接代入してもできるが，次の様にロピタルの定理を用いても計算できる。

$$\begin{aligned} g(z_1) &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{z^4+1} = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_1^3} \\ &= \frac{1}{4z_2} = \frac{1}{4}\overline{z_2} = \frac{1}{4}z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i) \end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{Res}(z_1) = -\frac{\sqrt{2}}{8}(1+i)$$

となる。

$h(z) = \dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)}$ とおく。$h(z)$ を $z=z_2$ のまわりでテーラー展開すると

$$h(z) = \sqrt{2}\frac{-1+i}{8} + \frac{3}{8}(z-z_2) - 5\sqrt{2}\frac{1+i}{32}(z-z_2)^2 + \cdots$$

となる。$f(z)$ を $z=z_2$ のまわりでローラン展開すると

$$f(z) = \sqrt{2}\frac{-1+i}{8}\frac{1}{z-z_2} + \frac{3}{8} - 5\sqrt{2}\frac{1+i}{32}(z-z_2) + \cdots$$

となる。

$h(z_2)$ を求めるとき前と同様に

$$\begin{aligned} h(z_2) &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z) = \lim_{z\to z_2}\frac{z-z_2}{z^4+1} = \lim_{z\to z_2}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_2^3} \\ &= \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{4}\overline{z_1} = \frac{1}{4}z_4 = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i) \end{aligned}$$

という方法でも計算できる。よって

$$\mathrm{Res}(z_2) = \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)$$

となる。これより

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= 2\pi i\left(\frac{\sqrt{2}}{8}(-1-i) + \frac{\sqrt{2}}{8}(1-i)\right) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \int_C f(z)dz &= \int_L f(z)dz + \int_\Gamma f(z)dz \\ &= \int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+1}dx + \int_\Gamma f(z)dz \end{aligned}$$

において $R \to \infty$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\sqrt{2}} &= \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+1}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx + \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)dz \\ &= I + \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)dz\end{aligned}$$

となるので $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma} f(z)dz$ を計算すれば I が求まる。

先程述べた次式を用いてこの積分を評価する。

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqq \int_C \left|f(z)\right| ds$$

今の場合勿論

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_\Gamma \left|f(z)\right| ds$$

を用いる。

$$\lim_{z\to\infty} z^4 f(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{z^4}{z^4+1} = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{z^4}} = 1$$

と収束するので，$z^4 f(z)$ は有界である。よってある正の実数 M が存在して，任意の z に対し $|z^4 f(z)| \leqq M$ が成立する。よって任意の z に対し

$$|f(z)| \leqq \frac{M}{|z^4|}$$

が成立している。Γ のパラメータ表示を

$$z(s) = Re^{i\frac{s}{R}} \quad (0 \leqq s \leqq \pi R)$$

とすると，これは長さによるパラメータ表示になっている。

$$\begin{aligned}\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_\Gamma \left|f(z)\right| ds \leqq \int_0^{\pi R}\frac{M}{\left|z^4\right|}ds = \int_0^{\pi R}\frac{M}{R^4}ds \\ = \frac{M}{R^4}\int_0^{\pi R} ds = \frac{M\pi R}{R^4} = \frac{M\pi}{R^3}\end{aligned}$$

が成立するので，

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \lim_{R\to\infty}\frac{M\pi}{R^3} = 0$$

より，

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

となる。以上により

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

を得る。

演習問題 3.1　次の積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos\theta}d\theta$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta}d\theta$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}d\theta$

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-4\cos\theta}d\theta$

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^4}{x^6+1}dx$

(8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}dx$

(9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3}dx$

(10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$