工業数学 II 問題解説 #2

河野

演習問題 1.1 次の関数を与えられた点でテーラー級数展開せよ。

(1) $e^z \quad (z=1)$

(2) $\dfrac{1}{1-z^2} \quad (z=0)$

(3) $\dfrac{1}{(z+1)z} \quad (z=1)$

(4) $\dfrac{1}{(z^2+1)z} \quad (z=1)$

(5) $\sin z \quad (z=\pi)$

(6) $z^2\cos(z) \quad (z=0)$

(7) $e^{z^2} \quad (z=0)$

(8) $\sin(2z^2) \quad (z=0)$

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

とテーラー展開されていれば $a_n = \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)$ となるのが基本的である。このやり方で高階導関数の計算が複雑になる場合は別の方法が必要になるかもしれない。

(1) $f(z)=e^z$ とおくと，$f'(z)=e^z$ である。よって何回微分しても

$$f^{(n)}(z) = e^z$$

となる。よって $a_n = \dfrac{1}{n!}f^{(n)}(1) = \dfrac{e}{n!}$ である。よってテーラー級数は

$$e^z = e + e(z-1) + \frac{e}{2}(z-1)^2 + \cdots + \frac{e}{n!}(z-1)^n + \cdots$$

となる。

(2) 前のやり方で考えてみる。$f(z)=\dfrac{1}{1-z^2}$ とおくと，$f'(z)=\dfrac{2z}{(1-z^2)^2}$ となる。高次導関数を順に計算していくと $f''(z)=\dfrac{2(3z^2+1)}{(1-z^2)^3}$，$f^{(3)}(z)=\dfrac{24z(1+z^2)}{(1-z^2)^4}$，$f^{(4)}(z)=\dfrac{24(1+10z^2+5z^4)}{(1-z^2)^5}$ $f^{(5)}(z)=\dfrac{240z(3+10z^2+3z^4)}{(1-z^2)^6}$ となる。n 次導関数を求めるのは難しそうなので，別の方法を考える。

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n \cdots$$

という関係式が成立していた。この式に z^2 を代入すると，

$$\frac{1}{1-z^2} = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n} + \cdots$$

を得る。

最初に述べた方法でやりたい人のために (つけたしです。興味のない人はとばして下さい。) n 次導関数を求めなくても，$f^{(n)}(0)$ が求まればよいことに注目する。

$$f(z)(1-z^2) = 1$$

と変形して両辺を n 回微分する。$1-z^2$ は 3 回以上微分すると 0 になることに注意するとライプニッツの定理より

$$f^{(n)}(z)(1-z^2)+{}_n\mathrm{C}_1 f^{(n-1)}(z)(-2z)+{}_n\mathrm{C}_2 f^{(n-2)}(z)(-2)=0$$

となる。$z=0$ を代入することにより，$f^{(n)}(0)-2\dfrac{n(n-1)}{2}f^{(n-2)}(0)=0$ を得る。$f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(0)=2$ より数学的帰納法を用いると

$$f^{(2n-1)}(0)=0, \quad f^{(2n)}(0)=(2n)!$$

が成立することが示される。よって

$$\frac{1}{1-z^2}=1+z^2+z^4+\cdots+z^{2n}+\cdots$$

を得る。

(3) ここでは $\dfrac{1}{1-z}$ の級数展開を用いて計算する方法で求める。

$\dfrac{1}{(z+1)z}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z+1}$ と部分分数展開できるので，それぞれの $z=1$ におけるテーラー級数を求める。$\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+(z-1)}$ と見て，

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\cdots+(-1)^n z^n+\cdots$$

に代入すると

$$\frac{1}{z}=1-(z-1)+(z-1)^2-\cdots+(-1)^n(z-1)^n+\cdots$$

を得る。

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{2+(z-1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}}$$

となるので $\alpha=\dfrac{z-1}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\alpha}=\frac{1}{2}\Big(1-\alpha+\alpha^2-\cdots+(-1)^n\alpha^n+\cdots\Big)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}(z-1)+\frac{1}{2^3}(z-1)^2-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n+\cdots\end{aligned}$$

となる。よって

$$\frac{1}{(z+1)z}=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}(z-1)+\frac{7}{8}(z-1)^2-\cdots+(-1)^n\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}(z-1)^n+\cdots$$

である。

(4)　この問題は少し難しかったかな (独り言)：　部分分数展開すると $\dfrac{1}{(z^2+1)z} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{z}{z^2+1}$ となる。前問で求めたように

$$\frac{1}{z} = 1-(z-1)+(z-1)^2-\cdots+(-1)^n(z-1)^n+\cdots$$

が成立している。

$$\frac{1}{z^2+1} = b_0+b_1(z-1)+b_2(z-1)^2+\cdots+b_n(z-1)^n+\cdots$$

となる $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$ が求まれば

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z^2+1} &= (z-1)\frac{1}{z^2+1}+\frac{1}{z^2+1} \\
&= (z-1)\Big(b_0+b_1(z-1)+b_2(z-1)^2+\cdots+b_n(z-1)^n+\cdots\Big) \\
&+\Big(b_0+b_1(z-1)+b_2(z-1)^2+\cdots+b_n(z-1)^n+\cdots\Big) \\
&= b_0+(b_0+b_1)(z-1)+(b_1+b_2)(z-2)^2+\cdots+(b_{n-1}+b_n)(z-1)^n+\cdots
\end{aligned}$$

となり級数が求まる。$g(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ とおくと，$g(z)(z^2+1)=1$ となるので，両辺を n 回微分すると

$$g^{(n)}(z)(z^2+1)+{}_n\mathrm{C}_1 g^{(n-1)}(z)2z+{}_n\mathrm{C}_2 g^{(n-2)}(z)2=0 \quad (n \geqq 1)$$

となる。$z=1$ を代入して，両辺を $n!$ で割ると，

$$2\frac{g^{(n)}(1)}{n!}+n\frac{g^{(n-1)}(1)}{n!}2+\frac{n(n-1)}{2}\frac{g^{(n-2)}(1)}{n!}2=0$$

となる。$b_n = \dfrac{g^{(n)}(1)}{n!}$ なので

$$b_n+b_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-2}=0$$

が成立する。$b_0 = \dfrac{1}{2}$，$b_1 = -\dfrac{1}{2}$ なので帰納的に求めると

$$\begin{aligned}
b_{4m} &= (-1)^m\frac{1}{2^{2m+1}} \\
b_{4m+1} &= (-1)^{m+1}\frac{1}{2^{2m+1}} \\
b_{4m+2} &= (-1)^m\frac{1}{2^{2m+2}} \\
b_{4m+3} &= 0
\end{aligned}$$

が成立することが分かる。よって

$$\frac{1}{(z^2+1)z} = a_0+a_1(z-1)+\cdots+a_n(z-1)^n+\cdots$$

とおくと $a_0=\dfrac{1}{2}$ であり,

$$\begin{aligned} a_{4m+1} &= -1 \\ a_{4m+2} &= \frac{2^{2m+2}+(-1)^m}{2^{2m+2}} \\ a_{4m+3} &= -\frac{2^{2m+2}+(-1)^m}{2^{2m+2}} \\ a_{4m+4} &= \frac{2^{2m+3}+(-1)^m}{2^{2m+3}} \end{aligned}$$

が成立することが分かる。最初の項をいくつか書くと

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2+1)z} &= \frac{1}{2}-(z-1)+\frac{5}{4}(z-1)^2-\frac{5}{4}(z-1)^3+\frac{9}{8}(z-1)^4-(z-1)^5 \\ &\quad +\frac{15}{16}(z-1)^6-\frac{15}{16}(z-1)^7+\frac{31}{32}(z-1)^8+\cdots \end{aligned}$$

となっている。

(5) $f(z)=\sin z$ とおくと $f'(z)=\cos z$, $f''(z)=-\sin z$, $f'''(z)=-\cos z$, $f^{(4)}(z)=\sin z$ となり，以下周期 4 で同じものが続く。$a_n=\dfrac{f^{(n)}(\pi)}{n!}$ とおくと n が偶数のときは $a_{2n}=0$ であり，奇数のときは $a_{2n-1}=(-1)^n\dfrac{1}{(2n-1)!}$ である。よって

$$\sin z=-(z-\pi)+\frac{1}{3!}(z-\pi)^3-\frac{1}{5!}(z-\pi)^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n-1)!}(z-\pi)^{2n-1}+\cdots$$

となる。

(6) $\cos z$ を $z=0$ でテーラー展開すると

$$\cos z=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\frac{1}{6!}z^6+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}z^{2n}+\cdots$$

なので

$$z^2\cos z=z^2-\frac{1}{2}z^4+\frac{1}{4!}z^6-\frac{1}{6!}z^8+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}z^{2n+2}+\cdots$$

となる。

(7) e^z を $z=0$ でテーラー展開すると

$$e^z=1+z+\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots+\frac{1}{n!}z^n+\cdots$$

なので，z に z^2 を代入すると

$$e^{z^2}=1+z^2+\frac{1}{2}z^4+\frac{1}{3!}z^6+\cdots+\frac{1}{n!}z^{2n}+\cdots$$

となる。

(8) $\sin z$ を $z=0$ でテーラー展開すると

$$\sin z=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^7+\cdots(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}z^{2n-1}+\cdots$$

なので，z に $2z^2$ を代入すると

$$\sin(2z^2) = 2z^2 - \frac{4}{3}z^6 + \frac{4}{15}z^{10} - + \cdots (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!}z^{4n-2} + \cdots$$

となる。

演習問題 1.2　次の関数を与えられた点の周りまたは領域でローラン展開せよ。

(1) $e^{1/z}$　$(z=0)$

(2) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$　$(0 < |z-2| < 1)$

(3) $\dfrac{\cos z}{z^4}$　$(z=0)$

(4) $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$　$(1 < |z-2|)$

(5) $\dfrac{1}{(z-1)z^2}$　$(0 < |z| < 1)$

(6) $\sin\dfrac{1}{z}$　$(0 < |z|)$

(7) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$　$(1 < |z-1|)$

(8) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$　$(0 < |z-2| < 1)$

(9) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$　$(1 < |z-2|)$

(10) $\dfrac{1}{\sin z}$　$(0 < |z| < \pi)$

(1)　e^z を $z=0$ でテーラー展開すると

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots + \frac{1}{n!}z^n + \cdots$$

なので

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \cdots$$

とローラン展開できる。

(2)　$\dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$ と部分分数展開できるので，$\dfrac{1}{z-1}$ を $z=2$ の周りでテーラー展開すればよい。

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{(z-2)+1} \\ &= 1 - (z-2) + (z-2)^2 + \cdots + (-1)^n(z-2)^n + \cdots\end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)} &= \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{z-2} - 1 + (z-2) - (z-2)^2 + \cdots + (-1)^{n+1}(z-2)^n + \cdots\end{aligned}$$

となる。

(3)　$\cos z$ を $z=0$ でテーラー展開すると

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}z^{2n} + \cdots$$

なので

$$\frac{\cos z}{z^4} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}z^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}z^{2n-4} + \cdots$$

となる。

(4) (2) ですでに

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}=\frac{1}{z-2}-1+(z-2)-(z-2)^2+\cdots+(-1)^{n+1}(z-2)^n+\cdots$$

を求めているので，これでよい様に思えるがそうではない。この級数は $|z-2|<1$ で収束するが，$|z-2|>1$ では収束しない。$|z-2|>1$ で収束する級数を求める必要がある。

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1}&=\frac{z-2}{z-2}\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}\left(\frac{z-2}{z-1}\right)\\&=\frac{1}{z-2}\frac{1}{\frac{z-1}{z-2}}=\frac{1}{z-2}\frac{1}{\frac{(z-2)+1}{z-2}}\\&=\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}\end{aligned}$$

と変形できる。$\alpha=\dfrac{1}{z-2}$ とおくと，$|z-2|>1$ より $|\alpha|<1$ を満たす。このとき

$$\frac{1}{1+\alpha}=1-\alpha+\alpha^2+\cdots+(-1)^n\alpha^n+\cdots$$

と級数展開できる。$|\alpha|<1$ なので，この範囲でこの級数は収束する。よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z-2)}&=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}\\&=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\left(1-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}+\cdots\right)\\&=\frac{1}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-2)^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(z-2)^n}+\cdots\end{aligned}$$

となる。

(5)

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

とテーラー級数展開できるので，

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)z^2}&=-\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z}\\&=-\frac{1}{z^2}\left(1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots\right)\\&=-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}-1+z+\cdots-z^n+\cdots\end{aligned}$$

である。

(6) $\sin z$ の $z=0$ におけるテーラー級数展開は

$$\sin z=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\cdots$$

なので $\dfrac{1}{z}$ を代入して

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\frac{1}{z^{2n+1}} + \cdots$$

が得られる。

(7) $g(z) = \dfrac{z}{(z-2)^2}$ を $z=1$ でテーラー展開する。$b_n = \dfrac{g^{(n)}(1)}{n!}$ とおく $b_0 = g(1) = 1, b_1 = g'(1) = 3$ である。$g(z)(z-2)^2 = z$ の両辺を x で n 回微分すると

$$g^{(n)}(z-2)^2 + {}_n\mathrm{C}_1 g^{(n-1)}(z)2(z-2) + {}_n\mathrm{C}_2 g^{(n-2)}(z)2 = 0$$

となる。$z=1$ を代入し，両辺を $n!$ で割ると

$$b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2} = 0$$

を得る。$b_n - b_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}$ なので b_n は等差数列である。$b_0 = 1, b_1 = 3$ なので $b_n = 2n+1$ である。よって

$$\frac{z}{(z-2)^2} = 1 + 3(z-1) + 5(z-1)^2 + \cdots + (2n+1)(z-1)^n + \cdots$$

となるので

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z-1)(z-2)^2} &= \frac{1}{z-1}\left(\frac{z}{(z-2)^2} = 1 + 3(z-1) + 5(z-1)^2 + \cdots + (2n+1)(z-1)^n + \cdots\right)\\ &= \frac{1}{z-1} + 3 + 5(z-1) + \cdots + (2n+1)(z-1)^{n-1} + \cdots\end{aligned}$$

となる。

(8) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ を部分分数展開すると，

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{2}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1}$$

となる。$|z-2| < 1$ において

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} &= \frac{1}{(z-2)+1}\\ &= 1 - (z-2) + (z-2)^2 + \cdots + (-1)^n(z-2)^n + \cdots\end{aligned}$$

とテーラー級数展開できるので

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{2}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} + 1 - (z-2) + (z-2)^2 + \cdots + (-1)^n(z-2)^2 + \cdots$$

を得る。

(9) (8) で求めた級数は $|z-2| > 1$ では収束しないので，(4) と同様の対応が必要になる。

$$\frac{1}{z-1} = \frac{z-2}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{z-2}\frac{1}{\frac{z-1}{z-2}} = \frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$$

となる。$\left|\dfrac{1}{z-2}\right| < 1$ なので

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-2}\left(1 - \frac{1}{z-2} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(z-2)^n}\right) + \cdots$$

とテーラー級数展開すると

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z-1)(z-2)^2} &= \frac{2}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{1}{(z-2)^3} - \frac{1}{(z-2)^4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(z-2)^n} + \cdots\end{aligned}$$

(10) このローラン級数の一般項を求めるのは難問でしたネ。係数をいくつか計算することで OK としましょう。$\sin z$ の $z=0$ におけるテーラー級数は

$$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1!)}z^{2n+1} + \cdots$$

なので

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin z} &= \frac{1}{z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1!)}z^{2n+1} + \cdots} \\ &= \frac{1}{z}\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{5!}z^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n}\right)}\end{aligned}$$

となるが $\alpha = \dfrac{1}{3!}z^2 - \dfrac{1}{5!}z^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n+1)!}z^{2n}$ とおくと

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{z}\frac{1}{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{z}\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z}\Bigg(1 + \left(\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{5!}z^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n}\right) \\ &\qquad + \left(\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{5!}z^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n}\right)^2 \\ &\qquad + \cdots + \left(\frac{1}{3!}z^2 - \frac{1}{5!}z^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n}\right)^n + \cdots\Bigg) \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{3!}z + \frac{7}{360}z^3 + \frac{31}{15120}z^5 + \frac{127}{604800}z^7 + \frac{73}{3421440}z^9 + \cdots\end{aligned}$$

となる。