工業数学 II 問題解説 #3

河野

演習問題 2.1　次の積分を求めよ。ただし $n \geqq 2$，$0 \leqq t \leqq 1$ とし，$t = 0$ に対応する点が始点とする。

(1) $\displaystyle\int_C z dz, \quad C : z(t) = t + t^2 i$　　(2) $\displaystyle\int_C (1+z)^2 dz, \quad C : z(t) = ti$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-a} dz, \quad C : z(t) = a + re^{2\pi i t}$　　(4) $\displaystyle\int_C \frac{1}{z-a} dz, \quad C : z(t) = a + re^{-2\pi i t}$

(5) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz, \quad C : z(t) = a + re^{2\pi i t}$

(1)　$\dfrac{dz}{dt} = 1 + 2ti$ なので

$$\begin{aligned}\int_C z dz &= \int_0^1 (t + t^2 i)(1 + 2ti) dt = \int_0^1 t - 2t^3 + 3t^2 i dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{2} t^4 + t^3 i \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i = i\end{aligned}$$

(2)　$\dfrac{dz}{dt} = i$ なので

$$\begin{aligned}\int_C (1+z)^2 dz &= \int_0^1 (1 - t^2 + 2ti) i dt = i \left[t - \frac{1}{3} t^3 + t^2 i \right]_0^1 \\ &= i \left(1 - \frac{1}{3} + i \right) = -1 + \frac{2}{3} i\end{aligned}$$

(3)　$\dfrac{dz}{dt} = 2\pi i r e^{2\pi i t}$ なので

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z-a} dz &= \int_0^1 \frac{1}{re^{2\pi i t}} 2\pi i r e^{2\pi i t} dt \\ &= 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i\end{aligned}$$

(4)　$\dfrac{dz}{dt} = -2\pi i r e^{-2\pi i t}$ なので

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z-a} dz &= \int_0^1 \frac{1}{re^{2\pi i t}} \left(-2\pi i r e^{2\pi i t} \right) dt \\ &= -2\pi i \int_0^1 dt = -2\pi i\end{aligned}$$

(5)　$\dfrac{dz}{dt} = 2\pi i r e^{2\pi i t}$ なので

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz &= \int_0^1 \frac{1}{r^n e^{2\pi i n t}} 2\pi i r e^{2\pi i t} dt = 2\pi i \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^1 e^{2\pi i (1-n) t} dt \\ &= 2\pi i \frac{1}{r^{n-1}} \left[\frac{1}{2\pi i (1-n)} e^{2\pi i (1-n) t} \right]_0^1 = 0\end{aligned}$$

演習問題 2.2　次の積分を求めよ。ただし，円 C は $|z-1|=3$ とする。

(1) $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{z+i}dz$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{\cos \pi z}{z+1}dz$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{z}{(z-1)(z-3i)}dz$　　(4) $\displaystyle\int_C \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}dz$

(5) $\displaystyle\int_C \frac{z^2+4}{z^3}dz$

コーシーの積分表示は以下の通りであった。

関数 $f(z)$ が単一閉曲線 C 上とその内部で正則とする。a が C の内部にあれば,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

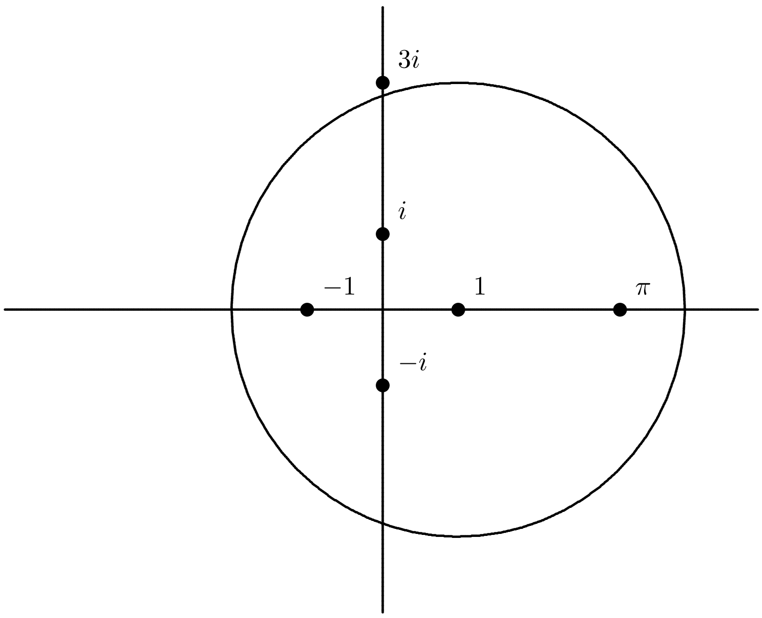
が成立する。

また自然数 n に対し

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

が成立する。

a が内分にあるかどうかきちんとチェックすることが必要である。この問題で出てくる特異点は次のようになっている。よって C の内部にない特異点は $3i$ のみである。



(1)　$f(z)=z^2$ とおくと $f(z)$ は C 上およびその内部で正則である。$a=-i$ として積分表示を適用する。

$$\int_C \frac{z^2}{z+i}dz = \int_C \frac{f(z)}{z-(-i)}dz = 2\pi i f(-i)$$
$$2\pi i(-i)^2 = -2\pi i$$

(2) $f(z)=\cos\pi z$ とおくと $f(z)$ は C 上およびその内部で正則である。$a=-1$ として積分表示を適用する。

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\cos\pi z}{z+1}dz &= \int_C \frac{f(z)}{z-(-1)}dz = 2\pi i f(-1)\\ &= 2\pi i\cos(-\pi) = -2\pi i\end{aligned}$$

(3) $f(z)=\dfrac{z}{z-3i}$ とおくと $f(z)$ は C 上およびその内部で正則である。$a=1$ として積分表示を適用する。

$$\begin{aligned}\int_C \frac{z}{(z-1)(z-3i)}dz &= \int_C \frac{f(z)}{(z-1)}dz = 2\pi i f(1)\\ &= 2\pi i\frac{1}{1-3i} = \frac{-3+i}{5}\end{aligned}$$

(4) $f(z)=e^{iz}$ とおくと $f(z)$ は C 上およびその内部で正則である。$a=\pi$，$n=2$ として積分表示を適用する。

$$\begin{aligned}\int_C \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}dz &= \int_C \frac{f(z)}{(z-\pi)^2+1}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(\pi)\\ &= \pi i\cdot i^2 e^{i\pi} = \pi i\end{aligned}$$

(5) $f(z)=z^2+4$ とおくと $f(z)$ は C 上およびその内部で正則である。$a=0$，$n=2$ として積分表示を適用する。

$$\begin{aligned}\int_C \frac{z^2+4}{z^3}dz &= \int_C \frac{f(z)}{(z-0)^{2+1}}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(0)\\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

演習問題 2.3　次の積分を求めよ。ただし，カッコの中は円 C を表すものとする。

(1) $\displaystyle\int_C \frac{ze^{\pi z}}{z^2+4}dz\ \ (|z|=3)$　　(2) $\displaystyle\int_C \frac{z+2}{z^2(z-4)}dz\ \ (|z|=3)$

(3) $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{(z-1)^2(z^2+1)}dz\ \ (|z-i|=\sqrt{3})$　　(4) $\displaystyle\int_C \frac{z}{z^4-1}dz\ \ (|z-i|=\sqrt{3})$

(5) $\displaystyle\int_C \frac{1}{(z-3)(z-1)^2}dz\ \ (|z-2|=2)$　　(6) $\displaystyle\int_C z^3e^{\frac{1}{z}}dz\ \ (|z-1|=3)$

(7) $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z}dz\ \ (|z|=1)$　　(8) $\displaystyle\int_C z^4\sin\frac{1}{z}dz\ \ (|z|=2)$

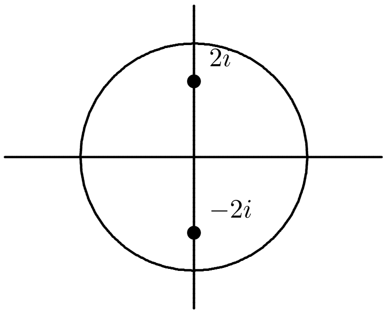
各問題を通じて被積分関数を $f(z)$ とし，積分値を I とする。

(1) 特異点は分母が 0 になる点である。$z^2+4=(z-2i)(z+2i)$ なので，$z=2i,-2i$ が特異点である。これらの特異点は次図のように円 C の内部にある。

$g(z)=(z-2i)f(z)=\dfrac{ze^{\pi z}}{z+2i}$ とおくと $g(z)$ は $z=2i$ の近傍で正則である。よって $g(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-2i)^k$ とテーラー展開できる。よって

$$f(z)=\frac{g(z)}{z-2i}=\frac{b_0}{z-2i}+b_1+b_2(z-2i)+\cdots+b_{n+1}(z-2i)^n+\cdots$$

となるので $2i$ は 1 位の極である。



$$\mathrm{Res}(2i) = \lim_{z \to 2i} g(z) = \frac{2ie^{2\pi i}}{2i + 2i} = \frac{1}{2}$$

である。

$g(z) = (z + 2i)f(z) = \dfrac{ze^{\pi z}}{z - 2i}$ とおくと $g(z)$ は $z = -2i$ の近傍で正則である。よって $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z + 2i)^k$ とテーラー展開できる。よって

$$f(z) = \frac{g(z)}{z + 2i} = \frac{b_0}{z + 2i} + b_1 + b_2(z + 2i) + \cdots + b_{n+1}(z + 2i)^n + \cdots$$

となるので $2i$ は 1 位の極である。

$$\mathrm{Res}(-2i) = \lim_{z \to -2i} g(z) = \frac{-2ie^{2\pi i}}{-2i - 2i} = \frac{1}{2}$$

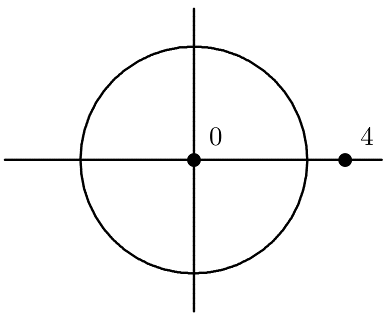
である。

留数定理より

$$I = 2\pi i \,\mathrm{Res}(2i) + 2\pi i \,\mathrm{Res}(-2i) = 2\pi i \frac{1}{2} + 2\pi i \frac{1}{2} = 2\pi i$$

である。

(2)



$f(z)$ の特異点は $z = 0, 4$ であるが，$z = 4$ は C の外側にある。よって

$$I = 2\pi \,\mathrm{Res}(0)$$

である。

$g(z) = z^2 f(z) = \dfrac{z+2}{z-4}$ とおくと $g'(z) = -\dfrac{6}{(z-4)^2}$ である。

$g(z)$ は $z=0$ の近傍で正則である。よって $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ とテーラー展開できる。よって

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^2} = \frac{b_0}{z^2} + \frac{b_1}{z} + b_2 + \cdots + b_{n+2} z^n + \cdots$$

となるので 0 は 2 位の極である。

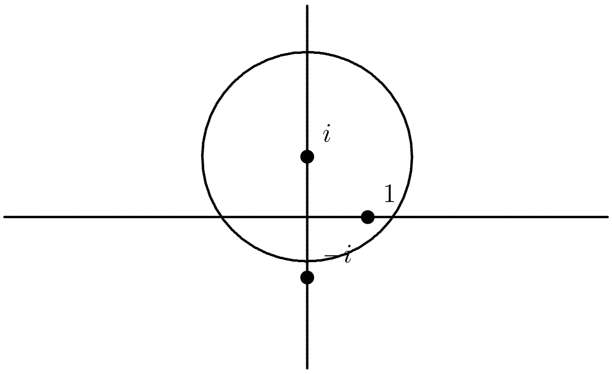
$$\mathrm{Res}(0) = \lim_{z \to 0} g'(z) = -\frac{3}{8}$$

なので

$$I = 2\pi i \left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{3\pi i}{4}$$

である。

(3)



$f(z)$ の特異点は $z = 1, i, -i$ であるが，$z = -i$ は C の外側にある。よって

$$I = 2\pi\,\mathrm{Res}(1) + 2\pi\,\mathrm{Res}(i)$$

である。

$g(z) = (z-1)^2 f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+1}$ とおくと $g(z)$ は $z = 1$ の近傍で正則である。よって $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-1)^k$ とテーラー展開できる。よって

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-1)^2} = \frac{b_0}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1} + b_2 + \cdots + b_{n+2}(z-1)^n + \cdots$$

となるので 1 は 2 位の極である。よって

$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{z \to 1} g'(z) = -\frac{1}{2}$$

となる。

$g(z) = (z-i)f(z) = \dfrac{z+1}{(z+i)(z-1)^2}$ とおくと $g(z)$ は $z=i$ の近傍で正則である。よって $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-i)^k$ とテーラー展開できる。よって

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-i} = \frac{b_0}{z-i} + b_1 + b_2(z-i) + \cdots + b_{n+1}(z-i)^n + \cdots$$

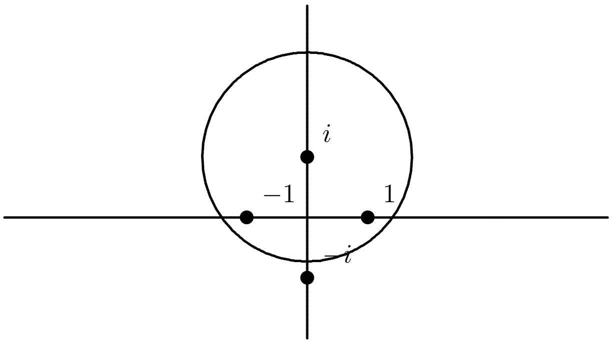
となるので i は 1 位の極である。よって

$$\mathrm{Res}(i) = \lim_{z\to i} g(z) = \frac{1+i}{4}$$

となる。

$$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}(1) + 2\pi i\,\mathrm{Res}(i) = -\frac{\pi(1+i)}{2}$$

(4)



$f(z)$ の特異点は $z = 1, -1, i, -i$ であるが，$z = -i$ は C の外側にある。よって

$$I = 2\pi\,\mathrm{Res}(1) + 2\pi i\,\mathrm{Res}(-1) + 2\pi\,\mathrm{Res}(i)$$

である。

$g(z) = (z-1)f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z^2+1)}$ とおくと $g(z)$ は $z=1$ の近傍で正則である。よって $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-1)^k$ とテーラー展開できる。よって

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-1} = \frac{b_0}{z-1} + b_1 + b_2(z-1) + \cdots + b_{n+1}(z-1)^n + \cdots$$

となるので 1 は 1 位の極である。よって

$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{z\to 1} g(z) = \frac{1}{4}$$

となる。

$g(z) = (z+1)f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z^2+1)}$ とおくと $g(z)$ は $z=-1$ の近傍で正則である。よって $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z+1)^k$ とテーラー展開できる。よって

$$f(z) = \frac{g(z)}{z+1} = \frac{b_0}{z+1} + b_1 + b_2(z+1) + \cdots + b_{n+1}(z+1)^n + \cdots$$

となるので -1 は 1 位の極である。よって

$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{z\to 1} g(z) = \frac{1}{4}$$

となる。

$g(z) = (z-i)f(z) = \dfrac{z}{(z+i)(z^2-1)}$ とおくと $g(z)$ は $z = i$ の近傍で正則である。よって $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-i)^k$ とテーラー展開できる。よって

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-i} = \frac{b_0}{z-i} + b_1 + b_2(z-i) + \cdots + b_{n+1}(z-i)^n + \cdots$$

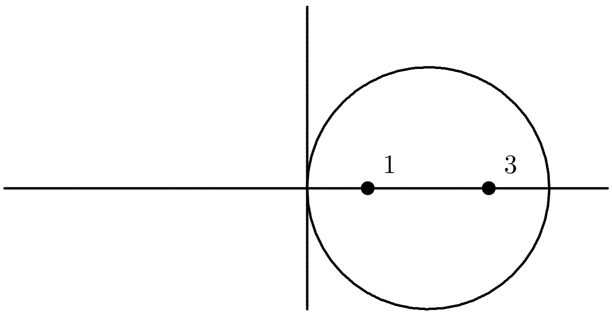
となるので i は 1 位の極である。よって

$$\mathrm{Res}(i) = \lim_{z\to 1} g(z) = -\frac{1}{4}$$

となる。

$$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}(1) + 2\pi i\,\mathrm{Res}(-1) + 2\pi i\,\mathrm{Res}(i) = \frac{\pi i}{2}$$

(5)



$f(z)$ の特異点は $z = 1, 3$ であり，共に C の内側にある。よって

$$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}(1) + 2\pi i\,\mathrm{Res}(3)$$

である。

$g(z) = (z-3)f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2}$ とおくと $g(z)$ は $z = 3$ の近傍で正則である。よって $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-3)^k$ とテーラー展開できる。よって

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-3} = \frac{b_0}{z-3} + b_1 + b_2(z-3) + \cdots + b_{n+1}(z-3)^n + \cdots$$

となるので 3 は 1 位の極である。よって

$$\mathrm{Res}(3) = \lim_{z\to 1} g(z) = \frac{1}{4}$$

となる。

$g(z) = (z-1)^2 f(z) = \dfrac{1}{z-3}$ とおくと $g(z)$ は $z=1$ の近傍で正則である。よって $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-1)^k$ とテーラー展開できる。よって

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-1)^2} = \frac{b_0}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{z-1} + b_2 + \cdots + b_{n+2}(z-1)^n + \cdots$$

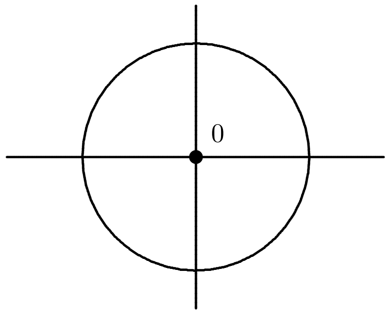
となるので 1 は 2 位の極である。よって

$$\mathrm{Res}(1) = \lim_{z\to 1} g'(z) = -\frac{1}{4}$$

となる。

$$I = 2\pi i\,\mathrm{Res}(1) + 2\pi i\,\mathrm{Res}(3) = 0$$

(6) 前問までの特異点は極であったが，この問題の特異点は真性特異点であることに注意すること。



$f(z)$ の特異点は $z=0$ であり，C の内部にある。よって

$$I = 2\pi\,\mathrm{Res}(0)$$

である。$g(z) = e^z$ は $z=0$ において $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$ とテーラー展開できるので

$$e^{\frac{1}{z}} = g\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{24}\frac{1}{z^4} \cdots + \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} + \cdots$$

となる。よって

$$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}} = z^3 + z^2 + \frac{1}{2}z + \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\frac{1}{z} + \cdots + \frac{1}{(n+3)!}\frac{1}{z^n} + \cdots$$

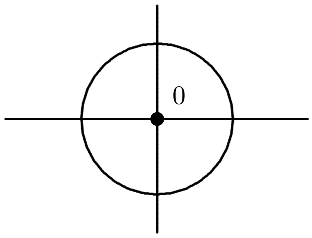
となる。故に

$$\mathrm{Res}(0) = \frac{1}{24}$$

である。

$$I = \frac{\pi i}{12}$$

(7)



$f(z)$ の特異点は $z=0$ であり，C の内部にある。よって

$$I = 2\pi i \,\mathrm{Res}(0)$$

である。

$g(z) = zf(z) = \cos z$ とおくと $g(z)$ は $z=0$ の近傍で正則である。よって $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ とテーラー展開できる。よって

$$f(z) = \frac{g(z)}{z} = \frac{b_0}{z} + b_1 + b_2 z + \cdots + b_{n+1} z^n + \cdots$$

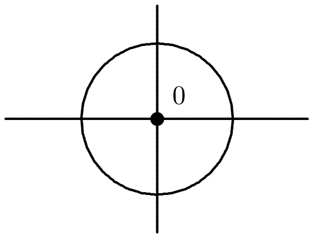
となるので 0 は 1 位の極である。よって

$$\mathrm{Res}(0) = \lim_{z \to 1} g(z) = 1$$

となる。

$$I = 2\pi i$$

(8)



$f(z)$ の特異点は $z=0$ であり，C の内部にある。よって

$$I = 2\pi i \,\mathrm{Res}(0)$$

である。

$g(z) = \sin z$ は $z=0$ において $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k-1)!} z^{2k-1}$ とテーラー展開できるので

$$\sin\frac{1}{z} = g\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{120}\frac{1}{z^5} \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}\frac{1}{z^{2n-1}} + \cdots$$

となる。よって

$$f(z) = z^4 \sin\frac{1}{z} = z^3 - \frac{1}{6}z + \frac{1}{120}\frac{1}{z} \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}\frac{1}{z^{2n-5}} + \cdots$$

となる。故に

$$\mathrm{Res}(0) = \frac{1}{120}$$

である。

$$I = \frac{\pi i}{60}$$