工業数学 II 問題解説 #4

河野

演習問題 3.1 次の積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos\theta} d\theta$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta} d\theta$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta} d\theta$

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{5-4\cos\theta} d\theta$

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^4}{x^6+1} dx$

(8) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx$

(9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx$

(10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$

(1) $z = e^{i\theta}$ とおくと

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

であり，オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \cos\theta, \quad \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \sin\theta$$

が成立する。

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$$

なので，z に関する複素積分に変換する。

$$\frac{1}{3+\cos\theta} = \frac{1}{3+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \frac{2z}{6z+z^2+1} = \frac{2z}{z^2+6z+1}$$

なので

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos\theta} d\theta &= \int_C \frac{2z}{z^2+6z+1}\frac{d\theta}{dz} dz \\ &= \int_C \frac{2z}{z^2+6z+1}\frac{1}{iz} dz \\ &= \frac{1}{i}\int_C \frac{2}{z^2+6z+1} dz\end{aligned}$$

となる。ただし，C は半径 1 の円である。

$$z^2+6z+1 = (z+3+2\sqrt{2})(z+3-2\sqrt{2})$$

なので関数 $\dfrac{2}{z^2+6z+1}$ の特異点は $z = -3-2\sqrt{2}$ および $z = -3+2\sqrt{2}$ であるが，C の内部にあるのは $z = -3+2\sqrt{2}$ である。よって

$$\int_C \frac{2}{z^2+6z+1} dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(-3+2\sqrt{2})$$

となる。$\alpha = -3+2\sqrt{2}$，$\beta = -3-2\sqrt{2}$ とおく。$z^2+6z+1 = (z-\alpha)(z-\beta)$ なので $f(z) = \dfrac{2}{z^2+6z+1} = \dfrac{2}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ と書ける。$g(z) = \dfrac{2}{z-\beta}$ とおき $z=\alpha$ でテーラー展開する。

$$g(z) = b_0 + b_1(z-\alpha) + b_2(z-\alpha)^2 + \cdots$$

とおくと，$b_0 = g(\alpha) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる。よって $f(z)$ の $z=\alpha$ におけるローラン展開は

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{(z-\alpha)} + b_1 + b_2(z-\alpha) + \cdots$$

となる。以上により

$$\mathrm{Res}(-3+2\sqrt{2}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

となる。よって

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{3+\cos\theta} d\theta = \frac{1}{i}\int_C \frac{2}{z^2+6z+1} dz = \frac{1}{i} 2\pi i \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

を得る。

(2)　$z = e^{i\theta}$ とおくと

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

であり，オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ より

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) = \cos\theta, \quad \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right) = \sin\theta$$

が成立する。

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz$$

なので，z に関する複素積分に変換する。

$$\frac{1}{2+\sin\theta} = \frac{1}{2+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \frac{2iz}{4iz+z^2-1} = \frac{2iz}{z^2+4iz-1}$$

なので

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta} d\theta &= \int_C \frac{2iz}{z^2+4iz-1}\frac{1}{iz} dz \\ &= \int_C \frac{2}{z^2+4iz-1} dz\end{aligned}$$

となる。ただし，C は半径 1 の円である。$\alpha = (-2+\sqrt{3})i$，$\beta = (-2-\sqrt{3})i$ とおくと

$$z^2+4iz-1 = (z-\alpha)(z-\beta)$$

なので関数 $f(z) = \dfrac{2}{z^2+4iz-1}$ の特異点は $z=\alpha$ および $z=\beta$ であるが，C の内部にあるのは $z=\alpha$ である。よって

$$\int_C \frac{2}{z^2+4iz-1} dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(\alpha)$$

となる。$f(z)=\dfrac{2}{z^2+4iz-1}=\dfrac{2}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ なので，$g(z)=\dfrac{2}{z-\beta}$ とおき $z=\alpha$ でテーラー展開する。

$$g(z)=b_0+b_1(z-\alpha)+b_2(z-\alpha)^2+\cdots$$

とおくと，$b_0=g(\alpha)=-\dfrac{i}{\sqrt{3}}$ となる。よって $f(z)$ の $z=\alpha$ におけるローラン展開は

$$f(z)=-\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{1}{(z-\alpha)}+b_1+b_2(z-\alpha)+\cdots$$

となる。以上により

$$\mathrm{Res}(\alpha)=-\frac{i}{\sqrt{3}}$$

となる。よって

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta=\int_C\frac{2}{z^2+4iz-1}dz=-2\pi i\frac{i}{\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

を得る。

(3) $z=e^{i\theta}$ とおくと

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$$

であり，オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ より

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\cos\theta,\quad \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\sin\theta$$

が成立する。

$$\frac{dz}{d\theta}=ie^{i\theta}=iz$$

なので，z に関する複素積分に変換する。

$$\frac{1}{2+\cos\theta}=\frac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\frac{2z}{4z+z^2+1}=\frac{2z}{z^2+4z+1}$$

なので

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta&=\int_C\frac{2z}{z^2+4z+1}\frac{1}{iz}dz\\&=\frac{1}{i}\int_C\frac{2}{z^2+4z+1}dz\end{aligned}$$

となる。ただし，C は半径 1 の円である。$\alpha=-2+\sqrt{3}$，$\beta=-2-\sqrt{3}$ とおくと

$$z^2+4z+1=(z-\alpha)(z-\beta)$$

なので関数 $f(z)=\dfrac{2}{z^2+4z+1}$ の特異点は $z=\alpha$ および $z=\beta$ であるが，C の内部にあるのは $z=\alpha$ である。よって

$$\int_C\frac{2}{z^2+4z+1}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(\alpha)$$

となる。$f(z)=\dfrac{2}{z^2+4z+1}=\dfrac{2}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ なので，$g(z)=\dfrac{2}{z-\beta}$ とおき $z=\alpha$ でテーラー展開する。

$$g(z)=b_0+b_1(z-\alpha)+b_2(z-\alpha)^2+\cdots$$

とおくと，$b_0=g(\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となる。よって $f(z)$ の $z=\alpha$ におけるローラン展開は

$$f(z)=\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{(z-\alpha)}+b_1+b_2(z-\alpha)+\cdots$$

となる。以上により

$$\mathrm{Res}(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

となる。よって

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\cos\theta}d\theta=\frac{1}{i}\int_C\frac{2}{z^2+4z+1}dz=\frac{1}{i}2\pi i\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

を得る。

(4) $z=e^{i\theta}$ とおくと

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$$

であり，オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ より

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\cos\theta,\quad \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)=\sin\theta$$

が成立する。

$$\frac{dz}{d\theta}=ie^{i\theta}=iz$$

なので，z に関する複素積分に変換する。

$$\frac{1}{5-4\cos\theta}=\frac{1}{5-4\cdot\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)}=\frac{z}{5z-2z^2-2}=-\frac{z}{2z^2-5z+2}$$

なので

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-4\cos\theta}d\theta&=-\int_C\frac{z}{2z^2-5z+2}\frac{1}{iz}dz\\&=-\frac{1}{i}\int_C\frac{1}{2z^2-5z+2}dz\end{aligned}$$

となる。ただし，C は半径 1 の円である。$\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\beta=2$ とおくと

$$2z^2-5z+2=2(z-\alpha)(z-\beta)$$

なので関数 $f(z)=\dfrac{1}{2z^2-5z+2}$ の特異点は $z=\alpha$ および $z=\beta$ であるが，C の内部にあるのは $z=\alpha$ である。よって

$$\int_C\frac{1}{2z^2-5z+2}dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(\alpha)$$

となる。$f(z)=\dfrac{1}{2z^2-5z+2}=\dfrac{1}{2(z-\alpha)(z-\beta)}$ なので，$g(z)=\dfrac{1}{2(z-\beta)}$ とおき $z=\alpha$ でテーラー展開する。

$$g(z)=b_0+b_1(z-\alpha)+b_2(z-\alpha)^2+\cdots$$

とおくと，$b_0=g(\alpha)=-\dfrac{1}{3}$ となる。よって $f(z)$ の $z=\alpha$ におけるローラン展開は

$$f(z)=-\frac{1}{3}\frac{1}{(z-\alpha)}+b_1+b_2(z-\alpha)+\cdots$$

となる。以上により

$$\mathrm{Res}(\alpha)=-\frac{1}{3}$$

となる。よって

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{5-\cos\theta}d\theta=-\frac{1}{i}\int_C\frac{1}{2z^2-5z+2}dz=\frac{1}{i}2\pi i\frac{1}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

を得る。

(5) $R>1$ とするとき，$\Gamma=\left\{Re^{it}\,\middle|\,0\leqq t\leqq\pi\right\}$，$L=\{x+0i\,|\,-R\leqq x\leqq R\}$，$C=\Gamma\cup L$ とおく。ただし，L の向きは $-R$ から R に向かう向き，Γ の向きは R から $-R$ に向かう向き，C の向きは L と Γ の向きから決まる向きとする。

$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$ とおくとき，

$$\int_C f(z)dz=\int_\Gamma f(z)dz+\int_L f(z)dz \tag{1}$$

が成立している。

s を長さによるパラメータとする。Γ を s を用いて表示すると

$$\Gamma=\left\{Re^{is/R}\,\middle|\,0\leqq s\leqq\pi R\right\}$$

となる。このとき

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|\leqq\int_\Gamma\left|f(z)\right|ds=\int_0^{\pi R}\left|f(z)\right|ds$$

が成立している。$|z^2|-1\leqq\left|z^2+1\right|$ より $\left|\dfrac{1}{z^2+1}\right|\leqq\dfrac{1}{|z^2|-1}$ が成立する。

$z\in\Gamma$ のとき $|z|=R$ であり，

$$\left|f(z)\right|=\left|\frac{1}{(z^2+1)^2}\right|\leqq\frac{1}{\left(|z|^2-1\right)^2}=\frac{1}{\left(R^2-1\right)^2}$$

が成立する。よって

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right|\leqq\int_0^{\pi R}\frac{1}{\left(R^2-1\right)^2}ds=\frac{\pi R}{(R^2-1)^2}$$

が得られる。$R\to\infty$ のとき $\dfrac{\pi R}{(R^2-1)^2}\to 0$ となるので，

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0$$

が示される。

次に $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求める。$f(z)$ の特異点は $z=i$ および $z=-i$ である。C の内部にある特異点は $z=i$ である。よって

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \,\mathrm{Res}(i)$$

が成立する。$f(z)=\dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ なので $g(z)=\dfrac{1}{(z+i)^2}$ とおき，$g(z)$ を $z=i$ でテーラー展開すると

$$g(z) = -\frac{1}{4} - \frac{i}{4}(z-i) + \frac{3}{16}(z-i)^2 + \cdots$$

となるので $f(z)$ は $z=i$ で

$$f(z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(z-i)^2} - \frac{i}{4}\frac{1}{z-i} + \frac{3}{16} + \cdots$$

とローラン展開できる。よって留数は $\mathrm{Res}(i)=-\dfrac{i}{4}$ である。

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(i) = -2\pi i\frac{i}{4} = \frac{\pi}{2}$$

を (1) に代入し $R\to\infty$ とすると

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{R\to\infty}\int_L f(z)dz$$

となるが，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_L f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

を得る。

(6) $R>1$ とするとき，$\Gamma=\left\{Re^{it}\,\middle|\,0\leqq t\leqq\pi\right\}$，$L=\{x+0i\,|\,-R\leqq x\leqq R\}$，$C=\Gamma\cup L$ とおく。ただし，L の向きは $-R$ から R に向かう向き，Γ の向きは R から $-R$ に向かう向き，C の向きは L と Γ の向きから決まる向きとする。

$f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+1}$ とおくとき，

$$\int_C f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz + \int_L f(z)dz \tag{2}$$

が成立している。

s を長さによるパラメータとする。Γ を s を用いて表示すると

$$\Gamma = \left\{Re^{is/R}\,\middle|\,0\leqq s\leqq\pi R\right\}$$

となる。このとき

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_\Gamma \left|f(z)\right|ds = \int_0^{\pi R}\left|f(z)\right|ds$$

が成立している。$|z^4|-1 \leqq \left|z^4+1\right|$ より $\left|\dfrac{1}{z^4+1}\right| \leqq \dfrac{1}{|z^4|-1}$ が成立する。

$z \in \Gamma$ のとき $|z|=R$ であり，

$$\left|f(z)\right| = \left|\frac{z^2}{z^4+1}\right| \leqq \frac{|z|^2}{|z|^4-1} = \frac{R^2}{R^4-1}$$

が成立する。よって

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_0^{\pi R} \frac{R^2}{R^4-1} ds = \frac{\pi R^3}{R^4-1}$$

が得られる。$R \to \infty$ のとき $\dfrac{\pi R^3}{R^4-1} \to 0$ となるので，

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0$$

が示される。

次に $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求める。$f(z)$ の特異点は $z^4+1=0$ を満たすので $z_1 = e^{i\pi/4} = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ および $z_2 = e^{3i\pi/4} = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$，$z_3 = e^{-3i\pi/4} = \dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$，$z_4 = e^{-i\pi/4} = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$，である。$C$ の内部にある特異点は z_1, z_2 である。よって

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(z_1) + 2\pi i \operatorname{Res}(z_2)$$

が成立する。$f(z) = \dfrac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$ なので $g_1(z) = \dfrac{z^2}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$ とおき，$g_1(z)$ を $z=z_1$ でテーラー展開すると

$$g_1(z) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} - \frac{i}{8}(z-z_1) + \frac{3+3i}{16\sqrt{2}}(z-z_1)^2 + \cdots$$

となるので $f(z)$ は $z=z_1$ で

$$f(z) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}\frac{1}{(z-z_1)} - \frac{i}{8} + \frac{3+3i}{16\sqrt{2}}(z-z_1) + \cdots$$

とローラン展開できる。よって留数は $\operatorname{Res}(z_1) = \dfrac{1-i}{4\sqrt{2}}$ である。

$g_2(z) = \dfrac{z^2}{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)}$ とおき $g_2(z)$ を $z=z_2$ でテーラー展開すると

$$g_2(z) = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{i}{8}(z-z_2) + \frac{-3+3i}{16\sqrt{2}}(z-z_2)^2 + \cdots$$

となるので $f(z)$ は $z=z_2$ で

$$f(z) = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}\frac{1}{(z-z_2)} + \frac{i}{8} + \frac{-3+3i}{16\sqrt{2}}(z-z_2) + \cdots$$

とローラン展開できる。よって留数は $\operatorname{Res}(z_2) = \dfrac{-1-i}{4\sqrt{2}}$ である。

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(z_1)+\mathrm{Res}(z_2)\right) = 2\pi i\left(\frac{1-i}{4\sqrt{2}}+\frac{-1-i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

を (2) に代入し $R\to\infty$ とすると

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \lim_{R\to\infty}\int_L f(z)dz$$

となるが，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_L f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+1)}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

となる。$\dfrac{x^2}{x^4+1}$ は偶関数なので

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^4+1)}dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

を得る。

(7)　$R>1$ とするとき，$\Gamma = \left\{\, Re^{it}\;\middle|\; 0 \leqq t \leqq \pi \,\right\}$，$L=\{\,x+0i \mid -R\leqq x\leqq R\}$，$C=\Gamma\cup L$ とおく。ただし，L の向きは $-R$ から R に向かう向き，Γ の向きは R から $-R$ に向かう向き，C の向きは L と Γ の向きから決まる向きとする。

$f(z) = \dfrac{z^4}{z^6+1}$ とおくとき，

$$\int_C f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz + \int_L f(z)dz \tag{3}$$

が成立している。

s を長さによるパラメータとする。Γ を s を用いて表示すると

$$\Gamma = \left\{\, Re^{is/R} \;\middle|\; 0\leqq s\leqq \pi R \,\right\}$$

となる。このとき

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_\Gamma \left|f(z)\right| ds = \int_0^{\pi R}\left|f(z)\right| ds$$

が成立している。$|z^6|-1 \leqq \left|z^6+1\right|$ より $\left|\dfrac{1}{z^4+1}\right| \leqq \dfrac{1}{|z^4|-1}$ が成立する。

$z\in\Gamma$ のとき $|z|=R$ であり，

$$\left|f(z)\right| = \left|\frac{z^4}{z^6+1}\right| \leqq \frac{|z|^4}{|z|^6-1} = \frac{R^4}{R^6-1}$$

が成立する。よって

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_0^{\pi R}\frac{R^4}{R^6-1}ds = \frac{\pi R^5}{R^6-1}$$

が得られる。$R \to \infty$ のとき $\dfrac{\pi R^5}{R^6-1} \to 0$ となるので,

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

が示される。

次に $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求める。$f(z)$ の特異点は $z^6+1=0$ を満たすので $z_1 = e^{i\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ および $z_2 = e^{3i\pi/6} = i$, $z_3 = e^{5i\pi/6} = \dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $z_4 = e^{7\pi/6} = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$, $z_5 = e^{9i\pi/6} = -i$, $z_6 = e^{11\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$, である。$C$ の内部にある特異点は z_1, z_2, z_3 である。よって

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(z_1) + 2\pi i\,\mathrm{Res}(z_2) + 2\pi i\,\mathrm{Res}(z_3)$$

が成立する。$f(z) = \dfrac{z^4}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)(z-z_6)}$ なので
$g_1(z) = \dfrac{z^4}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)(z-z_6)}$ とおき, $g_1(z)$ を $z=z_1$ でテーラー展開すると

$$g_1(z) = \frac{1}{3(\sqrt{3}+i)} + \frac{1}{(\sqrt{3}+i)^2}(z-z_1) - \frac{13}{9(\sqrt{3}+i)^2}(z-z_1)^2 + \cdots$$

となるので $f(z)$ は $z=z_1$ で

$$f(z) = \frac{1}{3(\sqrt{3}+i)}\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{(\sqrt{3}+i)^2} - \frac{13}{9(\sqrt{3}+i)^2}(z-z_1) + \cdots$$

とローラン展開できる。よって留数は $\mathrm{Res}(z_1) = \dfrac{1}{3(\sqrt{3}+i)}$ である。

$g_2(z) = \dfrac{z^4}{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)(z-z_5)(z-z_6)}$ とおき, $g_2(z)$ を $z=z_2$ でテーラー展開すると

$$g_2(z) = -\frac{i}{6} - \frac{1}{4}(z-z_2) - \frac{13i}{72}(z-z_2)^2 + \cdots$$

となるので $f(z)$ は $z=z_2$ で

$$f(z) = -\frac{i}{6}\frac{1}{z-z_2} - \frac{1}{4} - \frac{13i}{72}(z-z_2) + \cdots$$

とローラン展開できる。よって留数は $\mathrm{Res}(z_2) = -\dfrac{i}{6}$ である。

$g_3(z) = \dfrac{z^4}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_4)(z-z_5)(z-z_6)}$ とおき, $g_3(z)$ を $z=z_3$ でテーラー展開すると

$$g_3(z) = -\frac{1}{3(\sqrt{3}-i)} + \frac{1}{(\sqrt{3}-i)^2}(z-z_3)\frac{13}{9(\sqrt{3}-i)^2}(z-z_3)^2 + \cdots$$

となるので $f(z)$ は $z=z_3$ で

$$f(z) = -\frac{1}{3(\sqrt{3}-i)}\frac{1}{z-z_3} + \frac{1}{(\sqrt{3}-i)^2} + \frac{13}{9(\sqrt{3}-i)^2}(z-z_3) + \cdots$$

とローラン展開できる。よって留数は $\mathrm{Res}(z_3) = -\dfrac{1}{3(\sqrt{3}-i)}$ である。

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(z_1) + \mathrm{Res}(z_2) + \mathrm{Res}(z_3)\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{3(\sqrt{3}+i)} - \frac{i}{6} - \frac{1}{3(\sqrt{3}-i)}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

を (3) に代入し $R \to \infty$ とすると

$$\frac{2\pi}{3} = \lim_{R\to\infty}\int_L f(z)dz$$

となるが，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_L f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4}{x^6+1}dx = \frac{2\pi}{3}$$

を得る。

(8)　$R > 2$ とするとき，$\Gamma = \left\{ Re^{it} \,\middle|\, 0 \leqq t \leqq \pi \right\}$，$L = \{ x + 0i \mid -R \leqq x \leqq R \}$，$C = \Gamma \cup L$ とおく。ただし，L の向きは $-R$ から R に向かう向き，Γ の向きは R から $-R$ に向かう向き，C の向きは L と Γ の向きから決まる向きとする。

$f(z) = \dfrac{1}{z^2+z+1}$ とおくとき，

$$\int_C f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz + \int_L f(z)dz \tag{4}$$

が成立している。

s を長さによるパラメータとする。Γ を s を用いて表示すると

$$\Gamma = \left\{ Re^{is/R} \,\middle|\, 0 \leqq s \leqq \pi R \right\}$$

となる。このとき

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_\Gamma \left|f(z)\right|ds = \int_0^{\pi R}\left|f(z)\right|ds$$

が成立している。$\left|z^2+z+1\right| \geqq \left|z^2+z\right| - 1 \geqq |z^2| - |z| - 1$ より $\left|\dfrac{1}{z^2+z+1}\right| \leqq \dfrac{1}{|z^2|-|z|-1}$ が成立する。

$z \in \Gamma$ のとき $|z| = R$ であり，

$$\left|f(z)\right| = \left|\frac{1}{z^2+z+1}\right| \leqq \frac{1}{|z|^2-|z|-1} = \frac{1}{R^2-R-1}$$

が成立する。よって

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_0^{\pi R}\frac{1}{R^2-R-1}ds = \frac{\pi R}{R^2-R-1}$$

が得られる。$R \to \infty$ のとき $\dfrac{\pi R}{R^2-R-1} \to 0$ となるので，

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

が示される。

次に $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求める。$f(z)$ の特異点は $z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ および $z_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ である。C の内部にある特異点は $z = z_1$ である。よって

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(z_1)$$

が成立する。$f(z) = \dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}$ なので $g(z) = \dfrac{1}{z-z_2}$ とおき，$g(z)$ を $z = z_1$ でテーラー展開すると

$$g(z) = -\frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}(z-z_1) + \frac{i}{3\sqrt{3}}(z-z_1)^2 + \cdots$$

となるので $f(z)$ は $z = z_1$ で

$$f(z) = -\frac{i}{\sqrt{3}}\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{3} + \frac{i}{3\sqrt{3}}(z-z_1) + \cdots$$

とローラン展開できる。よって留数は $\operatorname{Res}(i) = -\dfrac{i}{\sqrt{3}}$ である。

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(i) = -2\pi i\frac{i}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

を (4) に代入し $R \to \infty$ とすると

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} = \lim_{R\to\infty}\int_L f(z)dz$$

となるが，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_L f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+x+1}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

を得る。

(9) $R > 1$ とするとき，$\Gamma = \left\{ Re^{it} \,\middle|\, 0 \leqq t \leqq \pi \right\}$，$L = \{ x+0i \mid -R \leqq x \leqq R \}$，$C = \Gamma \cup L$ とおく。ただし，L の向きは $-R$ から R に向かう向き，Γ の向きは R から $-R$ に向かう向き，C の向きは L と Γ の向きから決まる向きとする。

$f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^3}$ とおくとき，

$$\int_C f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz + \int_L f(z)dz \tag{5}$$

が成立している。

s を長さによるパラメータとする。Γ を s を用いて表示すると

$$\Gamma = \left\{ Re^{is/R} \,\middle|\, 0 \leqq s \leqq \pi R \right\}$$

となる。このとき

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_\Gamma \left|f(z)\right| ds = \int_0^{\pi R}\left|f(z)\right| ds$$

が成立している。$|z^2|-1 \leqq \left|z^2+1\right|$ より $\left|\dfrac{1}{z^2+1}\right| \leqq \dfrac{1}{|z^2|-1}$ が成立する。

$z \in \Gamma$ のとき $|z| = R$ であり，

$$\left|f(z)\right| = \left|\frac{z^2}{(z^2+1)^3}\right| \leqq \frac{|z|^2}{\left(|z|^2-1\right)^3} = \frac{R^2}{\left(R^2-1\right)^3}$$

が成立する。よって

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_0^{\pi R} \frac{R^2}{\left(R^2-1\right)^3} ds = \frac{\pi R^3}{(R^2-1)^3}$$

が得られる。$R \to \infty$ のとき $\dfrac{\pi R^3}{(R^2-1)^3} \to 0$ となるので，

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma f(z)dz = 0$$

が示される。

次に $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求める。$f(z)$ の特異点は $z_1 = i$ および $z_2 = -i$ である。C の内部にある特異点は $z_1 = i$ である。よって

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(i)$$

が成立する。$f(z) = \dfrac{z^2}{(z-z_1)^3(z-z_2)^3}$ なので $g(z) = \dfrac{z^2}{(z-z_2)^3}$ とおき，$g(z)$ を $z = i$ でテーラー展開すると

$$g(z) = -\frac{i}{8} - \frac{1}{16}(z-z_1) - \frac{i}{16}(z-z_1)^2 + +\frac{1}{32}\cdots$$

となるので $f(z)$ は $z = z_1$ で

$$f(z) = -\frac{i}{8}\frac{1}{(z-i)^3} - \frac{1}{16}\frac{1}{(z-z_1)^2} - \frac{i}{16}\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{32} + \cdots$$

とローラン展開できる。よって留数は $\operatorname{Res}(z_1) = -\dfrac{i}{16}$ である。

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(i) = -2\pi i \frac{i}{16} = \frac{\pi}{8}$$

を (5) に代入し $R \to \infty$ とすると

$$\frac{\pi}{8} = \lim_{R\to\infty} \int_L f(z)dz$$

となるが，$\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_L f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3} dx = \frac{\pi}{8}$$

を得る。

(10) $R>2$ とするとき，$\Gamma=\left\{\, Re^{it} \,\middle|\, 0 \leqq t \leqq \pi \,\right\}$，$L=\{\, x+0i \mid -R \leqq x \leqq R \,\}$，$C=\Gamma\cup L$ とおく。ただし，L の向きは $-R$ から R に向かう向き，Γ の向きは R から $-R$ に向かう向き，C の向きは L と Γ の向きから決まる向きとする。

$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ とおくとき，

$$\int_C f(z)dz=\int_\Gamma f(z)dz+\int_L f(z)dz \tag{6}$$

が成立している。

s を長さによるパラメータとする。Γ を s を用いて表示すると

$$\Gamma=\left\{\, Re^{is/R} \,\middle|\, 0 \leqq s \leqq \pi R \,\right\}$$

となる。このとき

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_\Gamma \left|f(z)\right|ds=\int_0^{\pi R}\left|f(z)\right|ds$$

が成立している。$|z^2|-1 \leqq \left|z^2+1\right|$ および $|z^2|-4 \leqq \left|z^2+4\right|$ より $\left|\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| \leqq \dfrac{1}{(|z^2|-1)(|z^2|-4)}$ が成立する。

$z\in\Gamma$ のとき $|z|=R$ であり，

$$\left|f(z)\right|=\left|\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| \leqq \frac{1}{(|z|^2-1)(|z|^2-4)}=\frac{1}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

が成立する。よって

$$\left|\int_\Gamma f(z)dz\right| \leqq \int_0^{\pi R}\frac{1}{(R^2-1)(R^2-4)}ds=\frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

が得られる。$R\to\infty$ のとき $\dfrac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-4)}\to 0$ となるので，

$$\lim_{R\to\infty}\int_\Gamma f(z)dz=0$$

が示される。

次に $\displaystyle\int_C f(z)dz$ を求める。$f(z)$ の特異点は $(z^2+1)(z^2+4)=0$ を満たすので $z_1=i$ および $z_2=2i$，$z_3=-i$，$z_4=-2i$，である。C の内部にある特異点は z_1, z_2 である。よって

$$\int_C f(z)dz=2\pi i\,\mathrm{Res}(z_1)+2\pi i\,\mathrm{Res}(z_2)$$

が成立する。$f(z)=\dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$ なので $g_1(z)=\dfrac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$ とおき，$g_1(z)$ を $z=z_1$ でテーラー展開すると

$$g_1(z)=-\frac{i}{6}-\frac{1}{36}(z-z_1)+\frac{25i}{216}(z-z_1)^2+\cdots$$

となるので $f(z)$ は $z=z_1$ で

$$f(z) = -\frac{i}{6}\frac{1}{(z-z_1)} - \frac{1}{36} + \frac{25i}{216}(z-z_1) + \cdots$$

とローラン展開できる。よって留数は $\mathrm{Res}(z_1) = -\dfrac{i}{6}$ である。

$g_2(z) = \dfrac{1}{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)}$ とおき $g_2(z)$ を $z=z_2$ でテーラー展開すると

$$g_2(z) = \frac{i}{12} - \frac{19}{144}(z-z_2) - \frac{265i}{1728}(z-z_2)^2 + \cdots$$

となるので $f(z)$ は $z=z_1$ で

$$f(z) = \frac{i}{12}\frac{1}{(z-z_2)} - \frac{19}{144} - \frac{256i}{1728}(z-z_2) + \cdots$$

とローラン展開できる。よって留数は $\mathrm{Res}(z_2) = \dfrac{i}{12}$ である。

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(z_1) + \mathrm{Res}(z_2)\right) = 2\pi i\left(-\frac{i}{6} + \frac{i}{12}\right) = \frac{\pi}{6}$$

を (6) に代入し $R \to \infty$ とすると

$$\frac{\pi}{6} = \lim_{R\to\infty}\int_L f(z)dz$$

となるが, $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_L f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ なので

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = \frac{\pi}{6}$$

を得る。