線形解析 I 要綱 #1

2002–4–11　　河野

ガイダンス

最初は数学的イントロではなく，非数学的イントロ—つまりガイダンス。

(1) 私語禁止。勿論数学的質問は随時 (私の話している途中でも) してかまわない。

(2) 出席はとらない。成績は基本的に試験で判断する。補助的に演習, レポートも用いることがある。

(3) 大学の数学についての注意。

1) 大学は講義だけ聞いて理解できるという想定をしていない。講義が演習・実験と比較して，同じ時間で単位数が多いのは，講義と同じ時間の予習・復習 (合わせて講義時間の 3 倍) をすることを前提としている。

2) 講義をしっかり聞き分からない所はその場で質問をするように (もちろん後での質問がダメというわけではない)。

3) 内容的にも変化がある。高校では，問題を解くのが中心で，所謂「模範回答」というものが有った。しかし大学では中身 (定義・定理) を正確に (論理的に) を理解するということが中心になる。問題はその補助手段と考えた方が良い。

4) 大学の先生は高校の先生程「親切」ではない。学生を「大人」として扱う。自分から action を起こさない限りめんどうは見てくれない。

5) 次は『数学 7 つの迷信』(小針宏) より—興味のある人は図書館へ (多分あると思う)。

1. 数学はむつかしく，数学のできる人は頭がよい。
2. 数学は計算技術である。
3. 記号は文字でなく，数式は言葉でない。
4. 公理は絶対自明の真理である。
5. 数学は答えの決まった問題を解くことである。
6. 数学は頭の体操として人間に役に立つ。
7. 数学と政治は無関係。

この講義はテキストとは少し違う進み方をする。線型解析で全体として学ぶべき内容を，最初の章で 3 次行列と 3 次元ベクトルに関し調べる。その後一般のベクトル空間にその事を拡張する。1 章をしっかり理解すれば一般化された場合も理解しやすい。逆に 1 章の理解が不充分であれば後の章の理解は難しいと考えられるので，1 章を正確に理解するよう努力してほしい。

なおこれから講義で配るプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/ に pdf 形式で置く予定である。

1　3次行列と3次元ベクトルの世界

1.1　3次行列

1.1.1　行列の積

一般に実数を縦に m 行横に n 列長方形に並べたものを $m \times n$ 行列または (m,n) 行列という。表すときは2重添え字を使って次の様に書く。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

つまり i 行 j 列の実数 (これを (i,j) 成分という) を a_{ij} で表す。

この章では 3×3 行列 (3次行列) のみ扱う (時々2次行列も扱うかもしれない)。3次行列は

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

と表される。**以下この章では特に断らない限り，行列といったら3次行列を表すものとする。**

2つの行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ に対しその和 $A+B$ を

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

で定義する。実数倍は

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \\ \alpha a_{31} & \alpha a_{32} & \alpha a_{33} \end{pmatrix}$$

で定義する。また積は $AB = (c_{ij})$ とおくとき，

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}$$

と定義する。行列の積は全体を通じて基本的であるが，積を何故この様に定義するかはおいおい理解されるであろう。

行列の和・積は実数の和・積と比べたとき，似ている性質もあるし異なる性質もある。

共通な性質として次があげられる。ここで O は成分がすべてゼロである行列 (零行列と呼ばれる)，E は単位行列と呼ばれる次の行列とする。

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以下零行列 O と単位行列 E は特に断らずに用いる場合も多い。

命題 1.1

(1) 任意の A, B, C に対し $(A+B)+C = A+(B+C)$
(2) 任意の A, B に対し $A+B = B+A$
(3) 任意の A に対し $A+O = A$
(4) 任意の A, B, C に対し $(AB)C = A(BC)$
(5) 任意の A に対し $AE = EA = A$
(6) 任意の A, B, C に対し $A(B+C) = AB+AC$
(7) 任意の A, B, C に対し $(A+B)C = AC+BC$

演習問題 1.1　命題 1.1 を示せ。
演習問題 1.2　行列の積と実数の積の違う点は大きく言って 2 つある。1 つは交換法則 $(AB = BA)$ が成立しない事，2 つは零因子 ($A \neq O$,$B \neq O$ で $AB = O$ となる行列，ただし O は零行列) の存在である。それぞれ例をあげよ。
演習問題 1.3　次を計算せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 3 & b \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ b & 3 & a \\ 2 & b & 1 \end{pmatrix}$ ただし a, b は自分の在籍番号の下 2 桁。

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の 2 乗と 3 乗

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のべき乗

(4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のべき乗

(5) $i \geqq j$ の時 $a_{ij} = 0$ であるような行列 $A = (a_{ij})$ に対し A^3

クロネッカーのデルタと呼ばれる記号を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定義する。このとき $E = (\delta_{ij})$ となる。3 次行列の場合はあまり意味がないようにみえるが，一般に n 次行列を考えるときこの記号は役に立つ。

2 つの行列 A, B に対し $AB = BA$ が成立するとき，A と B は**可換** (*commutative*) であるという。αE の形をしている行列をスカラー行列という。スカラー行列は任意の行列と可換であるが，逆に任意の行列と可換な行列はスカラー行列に限る。
演習問題 $^{(*)}$**1.4**　上の事実を証明せよ (($*$) がついている問題は少し難しいかも)。