線型解析 I 要綱 #3

2002–4–25　　河野

1.2　3 次元ベクトル空間

この節では 3 次元ベクトルと 3 次元ベクトル空間について述べる。この概念は後に n 次元ベクトル空間，抽象的ベクトル空間 (線型空間) へと拡張される。3 次元ベクトルは幾何的なものととられる事もできるが，拡張されるとその様な見方はできなくなる。ベクトルに対し幾何学的なイメージを持つ事は重要であるが，概念が拡張されたときに，幾何学的イメージにとらわれず抽象的に考える事も重要である。

1.2.1　3 次元ベクトル

高校ではベクトル横ベクトルとして

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

と書いていたが，線型解析では (ある理由があって; そのうちわかるかナ) 通常縦**ベクトル** (*vector*) で

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と書く。3 次元ベクトル全体の集合を $\boldsymbol{R}^3$ で表し，3 **次元ベクトル空間** (*3–dimensional vector space*) という。

集合であるベクトル空間とその元であるベクトルをきちんと区別できない人がいるので十分注意する事。特に部分集合を表す記号

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \boldsymbol{x}\text{は} \cdots \text{の性質を持つ} \right\}$$

に精通する様に (この記号は部分空間の所で取り扱う)。

3 次元ベクトル空間には和と実数倍が以下の様に定義される。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し和を

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

で，また実数 α とベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し実数倍を

$$\alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$$

と定義する。

和と実数倍に関しては次の 8 つの性質が**基本的**である。

命題 1.7 (1) [結合法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ に対し $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$

(2) [交換法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

(3) [零ベクトルの存在] 零ベクトルと呼ばれるベクトル $\mathbf{0}$ が存在して任意のベクトルについて $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$

(4) [逆ベクトルの存在] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し逆ベクトルと呼ばれるベクトル $-\boldsymbol{x}$ が存在して $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$

(5) [ベクトルに関する分配法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ と任意の実数 α に対し
$$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$$

(6) [実数倍に関する分配法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し
$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$$

(7) [実数倍に関する結合法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し
$$(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$$

(8) [単位倍] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と実数 1 に対し $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

演習問題 1.11 命題 1.7 を証明せよ。

この命題 1.7 を基本的と言ったのは 2 つの理由がある。1 つはベクトルの諸々の性質はこの 8 つの性質から導かれる事である。例えば任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $0\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ を証明してみよう。まず，(6) より $0\boldsymbol{x}=(0+0)\boldsymbol{x}=0\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x}$ が得られる。この両辺に $-(0\boldsymbol{x})$ を加えて，性質 (3), (4) を用いると
$$\mathbf{0}=0\boldsymbol{x}$$
が得られる。

演習問題 1.12 次を命題 1.7 から導け。

(1) $-\boldsymbol{x}=(-1)\boldsymbol{x}$

(2) 任意の実数 α に対し $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$

もう 1 つは後にベクトル空間を最も拡張した抽象的ベクトル空間 (または線型空間) を考えるが，拡張はこの性質をもつものすべてを線型空間と考える事で行われる。この事はまたそのときに注意する。

1.2.2 部分空間

3 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の空でない部分集合 W が和と実数倍に関して閉じているときその集合はそれ自身ベクトル空間と見ることができる。つまり次を定義する。

定義 1.8 $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 W が次の 3 つの条件を満たすとき W は $\boldsymbol{R}^3$ の**部分空間** (*subspace*) であるという。

(1) $W \neq \emptyset$

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ に対し $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in W$ と任意の実数 α に対し $\alpha\boldsymbol{x} \in W$

命題 1.9 部分空間 W に対して命題 1.7 の 8 つの性質が成立する。

証明　(3), (4) 以外は全体集合の $\boldsymbol{R}^3$ で成立するので，その部分集合である W で成立する。

W は空集合でないので，W に属するベクトル $\boldsymbol{x}_0$ が存在する。$(-1)\boldsymbol{x}_0$ も W に属し，$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}_0 + (-1)\boldsymbol{x}_0$ も W に属する。

演習問題 1.12 より，$-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$ となるので W の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $-\boldsymbol{x}$ も W に属する。 ▮

演習問題 1.13　次の集合で部分空間になるものはどれか考えよ。

(1) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 - x_2 + x_3 = 1 \right\}$

(3) $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0, x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$

(4) $W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(5) $W_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 = x_3 x_1 \right\}$

(6) $W_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, x_1 x_2 = x_2 x_3 \right\}$

(7) $W_7 = \boldsymbol{R}^3$

(8) $W_8 = \{\boldsymbol{0}\}$

$\boldsymbol{R}^3$ のベクトルを 1 つ固定する。そのベクトルの実数倍でえられるベクトル全体の集合 $\left\{ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}, \alpha \in \boldsymbol{R} \right\}$ を $\langle \boldsymbol{x} \rangle$ で表す。

一般にベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_n$ が与えられたとき，

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n$$

の形のベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ の **1 次結合** (*linear combination*) という。$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ の 1 次結合全体の集合

$$W = \{\, \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n \mid \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \boldsymbol{R} \,\}$$

は部分空間になる (命題 1.10 参照)。これを $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ によって**生成** (*generate*) される部分空間といい，$\langle\, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \,\rangle$ と書く。

命題 1.10 $W = \langle\, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \,\rangle$ は部分空間になる。

証明　$\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ をすべてを 0 とすると，$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \boldsymbol{x}_n \in W$ なので，$W \neq \emptyset$ である。

W から任意に 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ をとってくると，実数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ が存在して $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n$, $\boldsymbol{x}' = \alpha'_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha'_n \boldsymbol{x}_n$ と書ける。このとき

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = (\alpha_1 + \alpha'_1)\boldsymbol{x}_1 + \ldots + (\alpha_n + \alpha'_n)\boldsymbol{x}_n$$

なので，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' \in W$ である。

W の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n$ と任意の実数 α に対し

$$\alpha \boldsymbol{x} = (\alpha\alpha_1)\boldsymbol{x}_1 + \cdots + (\alpha\alpha_n)\boldsymbol{x}_n$$

なので $\alpha \boldsymbol{x} \in W$ である。

2 つの部分空間 W_1 と W_2 に対しその**和** (*sum*) を

$$W_1 + W_2 = \{\, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \ \boldsymbol{x} \in W_1, \boldsymbol{y} \in W_2 \,\}$$

で定義する。ベクトルの場合と同じ記号『+』を使ってはいるが意味が違う事に注意。

演習問題 1.14　2 つの部分空間 W_1, W_2 に対し $W_1 + W_2$ と $W_1 \cap W_2$ のいずれも部分空間になる事を示せ。