線型解析 I 要綱 #5

2002–5–16　　河野

命題 1.12，命題 1.13 により $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が W の基底であるとは極大な—つまり他の W のベクトルを加えると 1 次独立でなくなる様な— 1 次独立なベクトルの集合である事が分る。つまり，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が W の基底である必要十分条件は次の 2 つが成立する事である。

(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立である事。つまりスカラー $a_1, \ldots, a_n$ に対し

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o} \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \cdots = a_n = 0$$

が成立する。

(2) 極大である。つまり，任意の W のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し

$$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$$

は 1 次独立でない。

これは基底を見つける方法を与える。W を部分空間とする。

$W = \{\mathbf{0}\}$ の場合は特別である。基底が存在しないとも考えられるが，例外があるのはいやなので空集合が基底と考える事にしよう。

$W \neq \{\mathbf{0}\}$ の場合は $\boldsymbol{o}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}_1$ を持ってくる。次にベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1$ が 1 次独立なものを捜す。$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle = W$ ならこの様なベクトルが存在せず，$\boldsymbol{v}_1$ が基底になる。$\langle \boldsymbol{v}_1 \rangle \subsetneq W$ のとき，1 次独立なものが存在するので，それを $\boldsymbol{v}_2$ とする。次にベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立なものを捜す。$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle = W$ のとき，この様なベクトルが存在せず，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が基底になる。$\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \subsetneq V$ のとき 1 次独立なものがするので，それを $\boldsymbol{v}_3$ とする。次にベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立なものを捜す。あとで一般的な枠組みで示すが，ここでは $\boldsymbol{R}^3$ の 4 個以上のベクトルの組は 1 次独立でない事を証明抜きで認めておこう。

以上から $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間 W は

(1) $W = \{\mathbf{0}\}$

(2) $W = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$

(3) $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$

(4) $W = \boldsymbol{R}^3$

の 4 通りである事が分かる。

そこで部分空間の ‘次元’ を基底の個数で定義する。つまり (1) の場合 W は 0 次元，(2) の場合 W は 1 次元，(3) の場合 W は 2 次元，(4) の場合 W は 3 次元，と定義する。W 次元を $\dim W$ と表す。

厳密に言うと基底の個数が基底の選び方によらず一定である事を言わなければ厳密な定義にはならない。つまり次元を定義するためには次の事実が必要になる。

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ を W の 2 つの基底とすると $m = n$ である。

この事実は後で一般的な状況で証明する。

演習問題 1.18　次の部分空間の次元を求めよ。

$$(1)\ W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + 5y + z = 0 \right\}$$

$$(2)\ W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\}$$

$$(3)\ W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + 4y - z = 0, 2x + 3y + z = 0 \right\}$$

$$(4)\ W = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + 4y - z = 0, 2x + 3y + z = 0, x + y + z = 0 \right\}$$

1.3　線型写像

定義 1.16 U, V を $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間とする。U から V への写像 f **線型写像** (*linear map*) であるとは次の 2 つの条件を満たす事である。
(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ に対し $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ が成立する。
(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in U$ と任意の実数 α に対し $f(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$ が成立する。

命題 1.17 $f : U \to V$ を線形写像とする。$\mathrm{Ker}(f) = \{\, \boldsymbol{u} \in U \mid\ f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \,\}$,
$\mathrm{Im}(f) = \{\, \boldsymbol{v} \in V \mid\ \boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u} \in U \,\}$ とおくと，$\mathrm{Ker}(f)$，$\mathrm{Im}(f)$ は部分空間である。

例 1.18 行列 A に対し写像 f_A を $f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する (f_A は $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像)。このとき行列に関する分配法則から $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$ が成立する。また $A(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha A \boldsymbol{x}$ も成立するので，f_A は線型写像になる。

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ とする。この f_A に対し $\mathrm{Ker}(f_A)$ と $\mathrm{Im}(f_A)$ を求めてみよう。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f_A)$ とすると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 即ち $y + 2z = 0,\ x + 2y + 3z = 0,\ 2x + 3y + 4z = 0$ が成立しなければならない。この式達より $x - z = 0,\ x + y + z = 0$ を得る。逆にこの条件のとき $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(f_A)$ となる。

$\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(f_A)$ のとき，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$ が存在して $\boldsymbol{y} = f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と書ける。

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ なので,

$$A\boldsymbol{x} = x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = (x-z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (y+2z)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

と書ける。逆に $\boldsymbol{y} = p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の元に対し $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix}$ と置くと $\boldsymbol{y} = f_A(\boldsymbol{x})$ なので, $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}(f_A)$ である。

よって

$$\mathrm{Ker}(f_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x - z = 0, x + y + z = 0 \right\}$$

$$\mathrm{Im}(f_A) = \left\{ \boldsymbol{y} = \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; \boldsymbol{y} = p\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, p, q \in \boldsymbol{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

演習問題 1.19 次の行列で表現される線型写像 f_A に対し $\mathrm{Ker}(f_A)$ 及び $\mathrm{Im}(f_A)$ を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

演習問題 1.20 U, V, W を $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間とする。$f : U \to V$, $g : V \to W$ を線型写像とすると，合成写像 $g \circ f$ も線型写像であることを示せ。

$f : U \to V$ が上への 1 対 1 写像であるとき，逆写像 f^{-1} も同型写像である事を示せ。

命題 1.19 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3$ を線形写像とする。このとき 3 次行列 A が存在して任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $f(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v}$ が成立する。この行列 A を線型写像 f の表現行列という。

$f : U \to V$, $g : V \to W$ を線形写像とする。A を f の，B を g の表現行列とする。このとき BA は $g \circ f$ の表現行列である。

例 1.20 写像 f を z 軸に関する θ 回転とする。$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が張る平行 4 辺形の対角線で与えられるベクトルが $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ である。この平行 4 辺形を θ 回転させて得られる平行 4 辺形は $f(\boldsymbol{u})$ と $f(\boldsymbol{v})$ によって張られている。この対角線は $f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ であるが，これは $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ を θ 回転させた $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})$ である。よって $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$ が得られる。同様に $f(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$ が分かる。f は線型写像である。

f を表現する行列を $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を f で写したものは

$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ であり，$\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ を f で写したものは $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ であり，$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を f で写したものは $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。$f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{e}_3) = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ なので

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が分かる。