線型解析 I 要綱 #6　　2002–5–30　　河野

1.4　階数と基本変形

定義 1.21 線型写像 $f: U \to V$ に対し $\mathrm{Im}(f)$ の次元を f の**階数** (*rank*) と呼び，$\mathrm{rank}(f)$ で表す。
行列 A に対し A が表現する線型写像 f_A の階数を A の階数と呼び，$\mathrm{rank}\, A$ と表す。

行列 A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ を求めるには $\mathrm{Im}(f_A)$ の階数を求めればよいが，ここでもう少しアルゴリズミックな方法を考える。
次の 3 つの変形を行基本変形と言う。
(1) 行列 A のある行に他の行の定数倍を加える。
(2) 行列 A のある行を (0 でない) 定数倍する。
(3) 行列 A のある行と他の行を入れ換える。
次の 3 つの変形を列基本変形と言う。
(1) 行列 A のある列に他の列の定数倍を加える。
(2) 行列 A のある列を (0 でない) 定数倍する。
(3) 行列 A のある列と他の列を入れ換える。
これらを併せて基本変形と呼ぶ。基本変形では次が基本的である。

命題 1.22 行列 A を基本変形して行列 B になったとき，両者の階数は等しい，即ち $\mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, B$ が成立する。

例 1.23 命題 1.22 を利用して行列の階数を求めよう。次の行列を基本形と呼ぼう。

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

この行列の階数はそれぞれ $3, 2, 1, 0$ である。基本変形で上の形の行列のどれかに変形すればもとの行列の階数が分かる。

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ を考える。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるので $\mathrm{rank}\, A = 2$ が分かる。

演習問題 1.21　次の行列の階数を求めよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.5 行列式

2 次の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対しその行列式 $\det(A)$ は $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ で定義された。行列式 $\det(A)$ は『A が逆行列を持つ $\iff \det(A) \neq 0$』という性質を持っていた。これを 3 次の行列に対しても定義したい。そのために 2 次の場合行列式とはどの様なものかを見直してみる。

幾何的には「有効面積」と考えられる。$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ とおく。$\det(A) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, 即ち 2 つの 2 次元ベクトルの組に対し実数が対応していると考える。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平行 4 辺形の面積と考えられる。「有効」の意味は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が右手系をなしているとき正，左手系をなしているとき負をである状況を表現している。

代数的には次の性質を持つ実数への写像と考えられる。

(1) [**多重線型性**] $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ は各成分に関して線型である；

1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}'$ に対し $\det(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \det(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b})$

2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ と任意の実数 α に対し $\det(\alpha\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \alpha\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

1') 任意のベクトル $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}'$ に対し $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}') = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}')$

2') 任意のベクトル $\boldsymbol{b}$ と任意の実数 α に対し $\det(\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}) = \alpha\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(2) [**交代性**] $\det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = -\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

(3) [**基本ベクトルに対する値**] $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると $\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$

逆にこの 3 つの性質は行列式を特徴づける。実際 2 次元ベクトル 2 個の組に対し実数を対応させる写像 $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が (1), (2), (3) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ である。

演習問題 1.22 $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が (1), (2), (3) の性質を持てば $D(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ である事を示せ。

3 次行列に対して行列式を定義しよう。最初に代数的な立場から考えよう。3 次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し，これを 3 次元ベクトル 3 個の組と考える。

即ち $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ とするとき，$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ と見る。

3 個のベクトルの組 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ に対し実数を対応させる写像 $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が次の性質を持つとする。

(1) [**多重線型性**] $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ は各成分に関して線型である；

1) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}'_1$ に対し $\det(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

2) 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と任意の実数 α に対し $\det(\alpha\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \alpha\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

1') 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2'$ に対し $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_2', \boldsymbol{a}_3) = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2', \boldsymbol{a}_3)$

2') 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_2$ と任意の実数 α に対し $\det(\boldsymbol{a}_1, \alpha\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) = \alpha\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

1") 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_3'$ に対し $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 + \boldsymbol{a}_3') = \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3) + \det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3')$

2") 任意のベクトル $\boldsymbol{a}_3$ と任意の実数 α に対し $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \alpha\boldsymbol{a}_3) = \alpha\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

(2) [**交代性**] $\det(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$

(3) [**基本ベクトルに対する値**] $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると

$$\det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) = 1$$

命題 1.24 $\det(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ が上の (1), (2), (3) を満たすとき

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

となる。

次に幾何的に拡張を考えよう。3 つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ に対し，$A = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ と見るのは代数的な場合と同じである。$\det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ が張る平行 6 面体の「有効体積」で定義する: 即ち絶対値は体積で，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が右手系のときは正，左手系のときは負とする。これが代数的見方のときあげた (1), (2), (3) を満たすので同じものを定義している事が分かる。

ここで 3 次元ベクトルに対し**外積** (*outer product*) (または**ベクトル積** (*vector product*)) を定義する。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対し絶対値が $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の張る平行 4 辺形の面積で，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ と直交するベクトルを $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ とする。ただし，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ が右手系をなすものとする。

命題 1.25 $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ と書く事にする。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

が成立する。

証明 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と表す。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を θ とすると，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\cos\theta$ である。$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の張る平行 4 辺形の面積を S とすると，$S^2 = (|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|\sin\theta)^2$ より，$S^2 = |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2$ を得る。これを計算すると，$S^2 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2$ で $|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}|$ は平行 4 辺形の面積になる。

内積 $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$, $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$ はそれぞれ 0 になるので $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{y}$ が分かる。また $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3$ より $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ が右手系をなす事が分かる。

命題 1.26 外積は次の性質を持つ写像と考えられる。
(1) [**多重線型性**]　$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ は各成分に関して線型である；
1) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ に対し $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{y}$
2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α に対し $(\alpha\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y}=\alpha(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{y})$
1') 任意のベクトル $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}'$ に対し $\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}')=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}'$
2') 任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ と任意の実数 α に対し $\boldsymbol{x}\times(\alpha\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$
(2) [**交代性**]　$\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$
(3) [**基本ベクトルに対する値**]　$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ とすると
$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$
逆にこの 3 つの性質で外積は特徴付けられる。

命題 1.27 $\det(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が成立する。

命題 1.28 $A=(\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ に対し

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\\(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{z}) & (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{z})\\(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_1) & (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_2) & (\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y},\boldsymbol{e}_3)\end{pmatrix}$$

とおくと $\widetilde{A}A=\det(A)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

この命題は計算により出てくる。これを用いると次が得られる。

定理 1.29 行列 A に対し命題 1.28 で定義された $\widetilde{A}$ を考える。このとき $A\widetilde{A}=A\widetilde{A}=\det(A)Ethree$ である。特に $\det(A)\neq0$ とのとき逆行列が存在して $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$ である。

証明　今 $\det(A)\neq0\iff\det(\widetilde{A})\neq0$ を仮定する[1]。この仮定の下で $\det(A)\neq0$ のとき $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}$ が出て来る。$\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}A=E_3$ は明らかなので $A\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}=E_3$ を示す。$\widetilde{A}$ にこの定理を適用すると，$\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{A}=\det(\widetilde{A})E_3$ が得られる。$(\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{A})A=\widetilde{\widetilde{A}}(\widetilde{A}A)$ であるが，$(\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{A})A=\det(\widetilde{A})E_3A=\det(\widetilde{A})A$, $\widetilde{\widetilde{A}}(\widetilde{A}A)=\widetilde{\widetilde{A}}\det(A)E_3=\det(A)\widetilde{\widetilde{A}}$ より $\dfrac{1}{\det(\widetilde{A})}\widetilde{\widetilde{A}}=\dfrac{1}{\det(A)}A$ を得る。$A\dfrac{1}{\det(A)}\widetilde{A}=\dfrac{1}{\det(\widetilde{A})}\widetilde{\widetilde{A}}\widetilde{A}=E_3$

[1]後で示すが $\det(\widetilde{A})=\det(A)^2$ が成立する。