線型解析 I 要綱 #7　　2002–6–27　　河野

1.6　固有値・固有ベクトルと対角化

例から始めよう。$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とする。$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とすると $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ なので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

対角成分以外が 0 であるような行列を対角行列と呼び，行列 A に対し $P^{-1}AP$ が対角行列になるような P を求め，実際に $P^{-1}AP$ を求める事を対角化という。

対角化には色々な応用がある。ここではべき乗の計算のみを取り上げる。A の n 乗を計算してみよう。$B = P^{-1}AP$ とおくと，$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A(PP^{-1})AP = P^{-1}A^2P$ となる。以下同様にして $B^n = P^{-1}A^nP$ を得る。B は対角行列なので

$$B^n = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を得る。よって

$$A^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

が分かる。

この例では P は天下りに与えられた。逆にもしこの様な P が存在したとする。$P = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ とすると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ より，$AP = P\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を得る。このとき $(A\boldsymbol{a}\ A\boldsymbol{b}\ A\boldsymbol{c}) = A(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (4\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ より $A\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{a}$, $A\boldsymbol{b} = 4\boldsymbol{b}$, $A\boldsymbol{c} = 4\boldsymbol{c}$ が得られる。逆にこの様な $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ で 1 次独立なものが見つかれば，この変形を逆にたどり P が見つかる。変形のためには次の命題を必要とする。

命題 1.30 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が 1 次独立である事は $P = (\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ が逆行列を持つ事の必要十分条件である。

証明　P が逆行列を持つとする。$a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{z}=\mathbf{0}$ が成立しているとする。この式を行列とベクトルの積の形で書くと $(\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\mathbf{0}$。この式の左から P^{-1} をかけると $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\mathbf{0}$ を得る。

逆に $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ が 1 次独立とする。4 個以上のベクトルは 1 次独立でないの $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{R}^3$ の基底となる。任意のベクトルを線型結合で表示できるので，$\boldsymbol{e}_1=a_{11}\boldsymbol{x}+a_{21}\boldsymbol{y}+a_{31}\boldsymbol{z}$ となる実数 a_{11},a_{21},a_{31} が存在する。同様に $\boldsymbol{e}_2=a_{12}\boldsymbol{x}+a_{22}\boldsymbol{y}+a_{32}\boldsymbol{z}$ $\boldsymbol{e}_3=a_{13}\boldsymbol{x}+a_{23}\boldsymbol{y}+a_{33}\boldsymbol{z}$ なる実数が存在する。このとき $Q=(a_{ij})$ が P の逆行列を与える。

定義 1.31 行列 A に対し，スカラー λ と $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ となる時，λ を A の**固有値** (*eigenvalue*) と言い，$\boldsymbol{x}$ を（λ に属する）A の**固有ベクトル** (*eigenvector*) と言う。

$$W(\lambda)=\{\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}^3 \mid A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}\}$$

を λ に属する A の固有（ベクトル）空間と言う。

$\Phi(t;A)=\det(tE_n-A)$ を A の固有多項式といい，方程式，$\Phi(t;A)=0$ を A の固有方程式という。また，この方程式の解を特性解をいう。

命題 1.32 固有方程式 $\Phi(t;A)=0$ の 実数解は A の固有値である。逆に固有値は固有方程式の実数解である。

この命題は次の補題からすぐ出てくる。

補題 1.33 $\det(B)=0$ という事はあるゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ となることの必要十分条件である。

証明　(1)($\Longleftarrow$) 対偶を示す。$\det(B)\neq 0$ の時定理 1.29 より逆行列が存在するので $B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ の左から B^{-1} をかけると $\boldsymbol{x}=B^{-1}B\boldsymbol{x}=B^{-1}\mathbf{0}=\mathbf{0}$，よって O.K.

(2)($\Longrightarrow$)$B=(\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c})$ とおく。命題 1.30 より $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は 1 次独立ではない。よってすべては 0 ではない実数 x,y,z が存在して $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$ となる。$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とおき，これを行列の形に直すと $B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ が得られる。 ∎

命題 1.32 は $B=tE_n-A$ とおけばでてくる。

演習問題 1.23　次の行列の固有値・固有ベクトルを求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

命題 1.34 n 次行列 A が対角化可能である必要十分条件は n 個の 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$ が存在する事である。この時，$P=(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2\ \ \boldsymbol{u}_3)$ とおき，$A\boldsymbol{u}_i=\lambda_i\boldsymbol{u}_i$ $(i=1,2,3)$ とすると，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ が成立する。

証明

$$AP = A(\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3) = (A\boldsymbol{u}_1\ A\boldsymbol{u}_2 A\boldsymbol{u}_3) = (\lambda_1\boldsymbol{u}_1\ \lambda_2\boldsymbol{u}_2\ \lambda_3\boldsymbol{u}_3) = (\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

が成立する。命題 1.30 より逆行列 P が存在するので O.K. ∎

演習問題 1.24　次の行列を対角化せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$