2　n 項数ベクトルと (m,n) 行列

高校時代のベクトルは幾何学的なものとして導入された。我々も今まで扱ったのはそれであった。幾何的なものに固執している限り一般次元に拡張する事は易しくない。しかし代数的にみると平面のベクトルは 2 個の実数の組で表され，空間のベクトルは 3 個の組で表されている。そこに着目して最初の一般化を行う。

2.1　n 項数ベクトル空間

定義 2.1 n を自然数とする。n 個の実数 $a_1, \ldots, a_n$ を縦に並べて $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と書いて n **項 (列) 数ベクトル**と言う。簡単に (a_i) とも書く。ベクトルは普通太文字で ($\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{v}$ 等) 書き表す。2 つのベクトル $\boldsymbol{a} = (a_i)$ と $\boldsymbol{b} = (b_i)$ が等しいとは，各 i $(i = 1, \ldots, n)$ に対し $a_i = b_i$ が成立する時と定義する[2]。n 項 (列) 数ベクトル全体の集合を $\boldsymbol{R}^n$(実数全体の集合を $\boldsymbol{R}$ で表す。) と書いて n **次元数ベクトル空間**と言う (n **項数ベクトル空間**ともいう) [3]。平面のベクトル全体の集合は $\boldsymbol{R}^2$，空間のベクトル全体の集合は $\boldsymbol{R}^3$ と表される (点を位置ベクトルと同一視して)。行ベクトルも同様に考えられるが我々は普通列ベクトルを考え，以下いちいち列ベクトルとはことわらない事にする。

3 項数ベクトルとして例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 40 \end{pmatrix}$ がある。4 項数ベクトルの例として $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$,
5 項数ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 506 \\ 365 \\ 123 \\ 290 \\ 745 \end{pmatrix}$ などが考えられる。

---

[2] 何を当たり前の事をくどくど述べているのかと思う人もいるかもしれないが,「何を同じと思うか」という事は数学では (でも) 結構大切である。

[3] ベクトルとベクトルの集まりであるベクトル空間を混同する人がいるので注意する事。一般に，元と集合を混同しない事

数ベクトルには和と実数倍が以下の様に定義できる。
$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^n$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$ とすると

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

(a_i), (b_i) の記号を用いると，

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i), \qquad \alpha(a_i) = (\alpha a_i)$$

となる。

高校で学んだ 3 次元までのベクトルの時は $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ という書き方でもよかったが n 次元のベクトルになると添字付きの表現の方が便利である。この使い方になれることは大切である (後で行列の積の所で 2 重添字も含め扱いの練習をする)。

次は殆ど自明であるがベクトルの概念を拡張する時，大切な役割を果たすので一応命題としてあげておく。

命題 2.2 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{R}^n$ の元とし α, β を実数とする時次が成立する。

(1) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (結合法則)

(2) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (交換法則)

(3) 特別な元 $\boldsymbol{o}$ (零ベクトル又は零元と呼ばれる) が存在して任意のベクトルに対し
$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{v}$ となる。

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しあるベクトル $\boldsymbol{v}'$ が存在して ($\boldsymbol{v}$ の逆元という) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{o}$ となる (普通 $\boldsymbol{v}' = -\boldsymbol{v}$ と表す)。

(5) $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(6) $(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{v} = \alpha(\beta\boldsymbol{v})$

(8) $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$

幾つかを証明し残りは演習問題としておく。

(1) を示そう。実数に関しこのタイプの結合法則は知られているものとする。つまり任意の実数 a, b, c に対し $a + (b + c) = (a + b) + c$ の成立は仮定する。$\boldsymbol{u} = (u_i), \boldsymbol{v} = (v_i), \boldsymbol{w} = (w_i)$ とする。$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_i + v_i)$ であるので,

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = (u_i + v_i) + (w_i) = ((u_i + v_i) + w_i) = (u_i + (v_i + w_i)) = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$$

よって示された。次に (3)。$\mathbf{0}$ をすべての成分が 0 であるベクトルとすると，この性質を満たす事はすぐ分かる。 ∎

実数 $\boldsymbol{R}$ は 1 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^1$ と同一視できる。実数 a と 1 次元ベクトル (a) は厳密には同じものではないが同一視しても混乱は起こらないので以下そう考える。

演習問題 2.1　命題 2.2 を証明せよ。

高校のときはベクトルを幾何学的なものと考えていたので成分が実数であるということは当然とされた。しかし定義 2.1 の様に拡張された段階では係数が複素数の場合も同様な理論を展開することが可能である。定義としてきちんと書けば以下の様になる。

定義 2.3 n を自然数とする。n 個の複素数 $a_1, \ldots, a_n$ を縦に並べて $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と書いて**複素 n 項 (列) 数ベクトル**と言う。簡単に (a_i) とも書く。複素 n 項 (列) ベクトル全体を $\boldsymbol{C}^n$(複素数全体の集合を $\boldsymbol{C}$ で表す) と書いて**複素 n 次元数ベクトル空間**と言う (**複素 n 項数ベクトル空間**ともいう)。以後定義 2.1 で定義した n 項数ベクトルを**実 n 項数ベクトル**と呼ぶことにする。数ベクトルには和と複素数倍が実数の場合と同様に以下の様に定義できる。

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \boldsymbol{C}^n$, $\alpha \in \boldsymbol{C}$ とすると

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}$$

(a_i), (b_i) の記号を用いると,

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i), \qquad \alpha(a_i) = (\alpha a_i)$$

となる。

以上の定義を見ると実数の場合と複素数の場合が殆ど同じであることが分る。我々は以下では実数の場合と同様に複素数の場合も取り扱っていくが，性質が殆ど同じなので一々2 つの場合に分けて論議するのは面倒臭い。そこで一度に論議するために $\boldsymbol{K}$ という記号を導入する。$\boldsymbol{K}$ は $\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$ を表わし $\boldsymbol{K}$ の元をスカラーと呼ぶことにする。そして $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間というものを考える。$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}$ のときは実ベクトル空間，$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{C}$ のときは複素ベクトル空間になる。繰り返しになりくどいが $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間の定義を述べておく。

定義 2.4 n を自然数とする。n 個のスカラー $a_1, \dots, a_n$ を縦に並べて $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ と書いて K 上の n **項 (列) 数ベクトル**と言う。簡単に (a_i) とも書く。n 項 (列) ベクトル全体を $\boldsymbol{K}^n$ と書いて K 上の n **次元数ベクトル空間**と言う (n **項数ベクトル空間**ともいう)。K が明らかなときは「K 上」を省略する場合がある。