線型解析 II 要綱 #2

2002–10–3　　河野

2.2 (m,n) 行列と線型写像

一般の行列について考えよう。ここでも各成分は $\boldsymbol{K}$ の元とする。m 行 n 列の行列 ((m,n) 行列, $m\times n$ 行列ともいう) A を

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と書こう行列 A を (a_{ij}) とも書く。慣れればこの方が簡単である。

(m,n) 行列全体の集合を $M(m,n;\boldsymbol{K})$ で表す。$M(m,n;\boldsymbol{K})$ には和とスカラー倍が次の様に定義できる。

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}\in M(m,n;\boldsymbol{K})$，$\alpha\in\boldsymbol{K}$ に対し和，スカラー倍を

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & a_{ij}+b_{ij} & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\alpha A=\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \alpha a_{ij} & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

で定義する。和とスカラー倍は (a_{ij}) の記号で書くと

$$(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij}),\qquad \alpha(a_{ij})=(\alpha a_{ij})$$

と書ける。とくに $m=n$ の時 $M(n;\boldsymbol{K})$ とも書き，その元を n **次** (**正方**) **行列**と言う。K が明らかなときは省略して，$M(n), M(m,n)$ と書く場合もある。

ここで行列の積について復習しておこう。

$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\in M(m,n\,;\boldsymbol{K})$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}\in M(n,p\,;\boldsymbol{K})$ に対し

その積 $AB=(c_{ij})$ は

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

と定義されていた。定義から分るように積 AB は (m,p) 行列になる。行列の積は全体を通じて基本的である。特に 2 重添字を用いての掛け算が自由にできるようになる事を 1 つの目標として各自取り組んでほしい (演習問題 2.4 参照)。

演習問題 2.2　[行列の計算練習]　次を計算せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

ここで実数の 1 に対応する単位行列についてふれておく。クロネッカーのデルタと呼ばれる記号を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

で定義した時，n 次行列 E_n を $E_n = (\delta_{ij})$[4] と定義すると次が成立する。

命題 2.5　(m, n) 行列 A に対し

$$E_m A = A E_n = A$$

が成立する。特に n 次正方行列 A に対しては

$$E_n A = A E_n = A$$

が成立する。

命題 2.5 より単位行列 E は実数の積における 1 の役割を果たす事が分る。実数の 0 に対応するのが零行列 O(すべての成分が 0 の行列) である。

演習問題 2.3　行列の積と実数の積の違う点は大きく言って 2 つある。1 つは交換法則 $(AB = BA)$ が成立しない事，2 つは零因子 ($A \neq O$,$B \neq O$ で $AB = O$ となる行列，ただし O は零行列) の存在である。4 次の行列についてそれぞれ例をあげよ。

演習問題 2.4　**2 重添字に慣れるための問題**

(1) 命題 2.5 を示せ

(2) 行列の積に関し分配法則 $(A(B + C) = AB + AC$,$(A + B)C = AC + BC)$ と結合法則 $((AB)C = A(BC))$ が成立することを示せ。

[4] 次数 n が明らかな場合は E とも書く。

(3) 行列 $A=(a_{ij})$ に対し $B=(b_{ij})$ を $b_{ij}=a_{ji}$ で定めた時，B を A の転置行列といい $B={}^tA$ と表す。この時 ${}^t(AB)={}^tB{}^tA$ を示せ。

(4) n 次行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ に対し $A^n=O$(零行列) が成立する事を示せ ($n=3,4$ 等で試算してみよ)。

(5) n 次行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & & 0 \\ 1 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$ に対し A^n を計算せよ。($n=2,3,4$ 等で試算してみよ)。

(6) $i \geqq j$ の時 $a_{ij}=0$ であるような n 次行列 $A=(a_{ij})$ に対し $A^n=O$(零行列) が成立する事を示せ ($n=3,4$ 等で試算してみよ)。

定義 2.6 n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対し n 次正方行列 X が存在して

$$AX=E_n \qquad XA=E_n$$

となるとき X を A の**逆行列** (*inverse matrix*) という。またこのとき A は**可逆** (*invertible*) または**正則** (*non–singular*) であるという。

3 次行列の場合と同様に $AX=E_n$ または $XA=E_n$ の一方が成立すれば X が逆行列である事が分かるが，この事実は後で行列式の所で証明する。

命題 2.7 A,B が正則な行列のとき AB も正則で，$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ が成立する。

演習問題 2.5 次の形の行列が正則であるための必要十分条件を求めよ。

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & x & y \\ 0 & b & 1 & z \\ 0 & 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

また逆行列を求めよ。

演習問題 2.6 A が正則のとき ${}^tA$ も正則であり，$({}^tA)^{-1}={}^t(A^{-1})$ を示せ。

定義 2.8 ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ からベクトル空間 $\boldsymbol{K}^m$ への写像 f が次の 2 つの性質を満たすとき**線型写像** (*linear map*) という。

(1) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$
(2) 任意の $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^n$ と任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し $f(\alpha\boldsymbol{v}) = \alpha f(\boldsymbol{v})$
形式的には 3 次元ベクトルの場合と全く同じである。

$A \in M(m, n\,; \boldsymbol{K})$ が与えられた時 $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への写像 f_A を

$$f_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

で定義すると f_A は線型写像になる。

逆に $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像は行列で表現できる。つまり次が成り立つ。

定理 2.9 $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像 f に対し (m, n) 行列 A が存在して $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる。

証明 $\boldsymbol{e}_i = (\delta_{ij})$ とおく。$f(\boldsymbol{e}_i)$ は $\boldsymbol{K}^m$ のベクトルなのでこれを $f(\boldsymbol{e}_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} (i = 1, \ldots, n)$,

$A = (a_{ij})$ と置く。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ なので

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \\ &= A\boldsymbol{x} \ \blacksquare \end{aligned}$$

定理 2.9 の行列 A の事を線型写像 f を表現する行列と呼ぶ(5)。数ベクトル空間とは限らない場合の線型写像の表現についても後で扱う。

行列の積と写像の積 (合成関数) については次が成立する。というか実はこの定理が成立するように行列の積を定義したわけである。

定理 2.10 f を $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像，g を $\boldsymbol{K}^p$ から $\boldsymbol{K}^n$ への線型写像とする，定理 2.9 より写像 f を表現する行列を A，写像 g を表現する行列を B とすると写像 fg(合成写像) を表現する行列は AB である。

演習問題 2.7 定理 2.10 を証明せよ。

(5) A と f を同一視して，線型写像 A と言うこともある。