3　線型空間 (抽象的ベクトル空間) と線型写像

3.1　線型空間 (抽象的ベクトル空間)

前の節でベクトル及びベクトル空間の概念を一般化したが，ここでは更に一般化する。ベクトルには和 (足し算) と実数倍または複素数倍，つまりスカラー倍 が定義されていたが，逆に和 (足し算) とスカラー倍の定義されている集合の元をベクトル空間考え，その各元をベクトルと呼ぶことにしよう。最初に例として和とスカラー倍の定義されている色々な集合を考える。

例 3.1　(1) **実 n 項数ベクトル空間**: これについては前の節で考えた。$V = \boldsymbol{R}^n$ とおくと，V には和と実数倍が定義されている。

(2) **複素 n 項数ベクトル空間**: これについても前の節で考えた。$V = \boldsymbol{C}^n$ とおくと，V には和と複素数倍が定義されている。

(3) **線型部分空間**: 例えば $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$ とおく。V のベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$[(6)] とスカラー α に対し $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ と $\alpha \boldsymbol{v}_1$ も V のベクトルとなる。$\boldsymbol{K}^3$ 全体を考えないで，V のみを考える。このとき V には和とスカラー倍が定義されているとみる事ができる。

(4) $(2,2)$ **行列**:　2 行 2 列の行列を $(2,2)$ 行列 または 2×2 行列という。ここで各成分は $\boldsymbol{K}$ の元とする。$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \boldsymbol{K} \right\}$ とおく。V には行列の和とスカラー倍が定義されている。

(5) (m,n) **行列**:　(m,n) 行列全体の集合 $M(m,n;\boldsymbol{K})$ には和とスカラー倍が定義されていた。もう一度確認すると

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & b_{ij} & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \in M(m,n;\boldsymbol{K})$，$\alpha \in \boldsymbol{K}$ に対し和，スカラー倍は

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & a_{ij}+b_{ij} & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

[(6)] ここの添字の使い方は前節で述べたものと少し違う。2 次元，3 次元の時はこの様な表記法もある。

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \alpha a_{ij} & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

であった。あるいは

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$$

とも表す。

(6) **多項式**: x に関する (実数係数) 多項式全体の集合を V とすると和と実数倍が定義されている。多項式と多項式の和は多項式となるし，多項式の実数倍も多項式になる。この x に関する (実数係数) 多項式全体の集合を $\boldsymbol{R}[x]$ で表す。また n 次以下の多項式全体の集合を $\boldsymbol{R}_n[x]$ と表す事にする。例えば $\boldsymbol{R}_2[x]$ は 2 次以下の多項式全体の集合，つまり 2 次式，1 次式，0 次式 (定数) 全体からなる集合である。

同様に複素数係数の多項式全体の集合を $\boldsymbol{C}[x]$ で n 次以下の複素数係数の多項式全体を $\boldsymbol{C}_n[x]$ と書く。これらには和と複素数倍が定義できる。

(7) **連続関数**: 閉区間 I または $\boldsymbol{R}$ 上で定義された実数値連続関数全体の集合を V とすると，やはり和と実数倍が定義できる。和と実数倍は

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

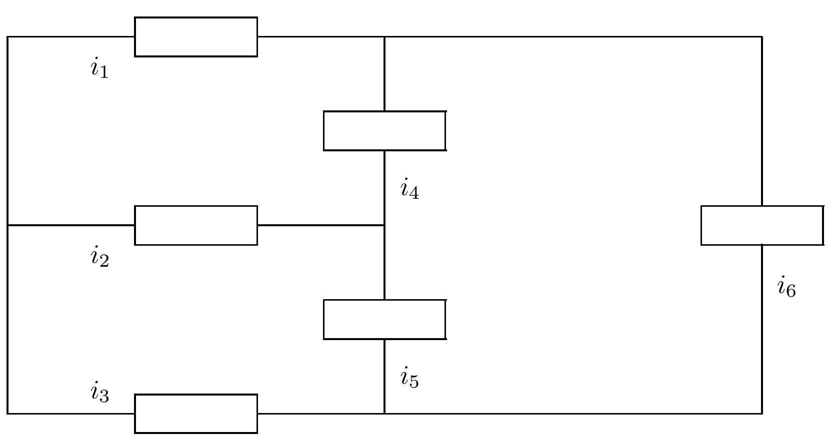
で定義する。ここでは関数 f と x に於ける値 $f(x)$ とは区別しておく。高校では x に於ける値が $f(x)$ である関数を $f(x)$ と書いて，f を独立的なものとは余り見てこなかったが，この区別は大事である (混乱の恐れのない時はどちらで表してもよい)。連続関数と連続関数の和，連続関数の実数倍はやはり連続関数になる。この集合を定義域にしたがって，$C(I)$ または $C(\boldsymbol{R})$ と書く。

また複素数値関数に対し同様に考えると，定義できる集合を $C(I;\boldsymbol{C})$ または $C(\boldsymbol{R};\boldsymbol{C})$ と書く。

(8) **微分可能な関数**: 閉区間 I または $\boldsymbol{R}$ 上で定義された微分可能な実数値関数全体の集合を V とすると，やはり和と実数倍が (7) と同じに定義できる。この集合を定義域にしたがって，$D(I)$ または $D(\boldsymbol{R})$ と書く。

同様に微分可能な複素数値関数の全体を $D(I;\boldsymbol{C})$ または $D(\boldsymbol{R},\boldsymbol{C})$ と書く。

(9) **ある回路の電流の状態**: G をある回路とする。例えば次図の様なものする。



ここで box の部分は素子 (抵抗 and/or 電源等) とするが，black box で中は分からないものとする。$i_1, \ldots, i_6$ は電流，ただし向きは左から右, 下から上にとっておく。状態を表わすベクトルを $\boldsymbol{i} = (i_1, \ldots, i_6)$ とし，可能なすべての状態を表わすベクトルを集めた集合を V とする。ベクトルの和・実数倍を成分同士の和・実数倍で定義できる (何故か，ヒント:キルヒホッフの第 1 法則)。

(10) **ある回路の電圧の状態**: G を (9) の回路とする。各 i_k に対応する電圧を e_k とする。状態を表わすベクトルを $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_6)$ [7]とし，可能なすべての状態を表わすベクトルを集めた集合を W とする。ベクトルの和・実数倍を成分同士の和・実数倍で定義できる (何故か，ヒント:キルヒホッフの第 2 法則)。

(11) **数列全体**: V を実数列全体からなる集合とする。2 つの数列 $\boldsymbol{a} = \{a_i\}, \boldsymbol{b} = \{b_i\}$ を考える。$c_i = a_i + b_i (i = 1, \ldots)$ に対し $\boldsymbol{c} = \{c_i\}$ とおくとき，$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ と定義する。また実数 α に対し $d_i = \alpha a_i (i = 1, \ldots)$ とし，$\boldsymbol{d} = \{d_i\}$ とおくとき $\boldsymbol{d} = \alpha\boldsymbol{a}$ と定義する。複素数の数列も同様に考えることができる。

(12) **フィボナッチ数列**: 任意の自然数 n に対し $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たす数列 $\{a_i\}$ をフィボナッチ数列と言う。V をフィボナッチ数列全体からなる集合とする。数列 $\{a_i\}$，$\{b_i\}$ をフィボナッチ数列とする。$\{c_i\} = \{a_i\} + \{b_i\}$ とすると，$\{c_i\}$ もフィボナッチ数列となる。また $\{d_i\} = \alpha\{a_i\}$ に対し $\{d_i\}$ もフィボナッチ数列。

(13) **線型微分方程式の解空間**: 線型微分方程式を考える。何でもよいがここでは 2 階の微分方程式，例えば $y'' - y' - 2y = 0$ を考える。この微分方程式の解となる関数全体の集合を V とする。つまり

$$V = \{y \mid y'' - y' - 2y = 0\}$$

とする。例えば $y(x) = e^{-x}$ とおくと $y(x) \in V$ である。$y_1(x), y_2(x) \in V$ の時，
$y_1(x) + y_2(x) \in V$，$\alpha y_1(x) \in V$ である[8]。解となる関数を実数値関数の範囲で考えるか，複素数値関数で考えるかで，スカラー倍 (実数倍または複素数倍) が定義され，スカラー倍も微分方程式の解になる。

以上の様な例からベクトル空間の定義を次の様に一般化する[9]。

定義 3.2 空でない集合 V に和 (足し算) とスカラー倍が定義されていて，次の (1)–(8) の性質を満足する時 V を $\boldsymbol{K}$ の**線型空間 (抽象的ベクトル空間)**(*linear space, vector space*)[10]といい V の各元を**ベクトル** (vector) と呼ぶ。$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を V の元とし $\alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$ に対し

(1) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (結合法則)

(2) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (交換法則)

(3) 特別な元 $\boldsymbol{o}$ (零ベクトル又は零元と呼ばれる) が存在して任意のベクトルに対し
$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{v}$ となる。

---

[7] 実は (9) のベクトル $\boldsymbol{i}$ を列ベクトルで書けば，このベクトルは行ベクトルで書かれるべきである。その理由についてここではふれないが，量子力学のブラベクトルとケットベクトルの関係と同じである。

[8] ここでは (7) とは逆に $y(x)$ が関数を表していると見た。勿論 $y \in V$ という書き方も許される。

[9] 命題 1.7 も参照の事。

[10] これも通常ベクトル空間と呼ばれるが，この講義では混乱をさけるためにこう呼ぶ事にする。線型代数関係の本を読むときは注意する事。

(4) 任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しあるベクトル $\boldsymbol{v}'$ が存在して ($\boldsymbol{v}$ の逆元という) $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{o}$ となる (普通 $\boldsymbol{v}'=-\boldsymbol{v}$ と表す)。

(5) $\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(6) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}$ (分配法則)

(7) $(\alpha\beta)\boldsymbol{v}=\alpha(\beta\boldsymbol{v})$

(8) $1\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

例 3.1 で取上げた例はいずれもこの意味 (拡張された意味) でのベクトル空間になり，これをチェックする事は難しくない (→ 演習問題 3.1)。ここでは零元 (零ベクトル) の事だけ述べておこう。ベクトル空間になるためには零元が存在する事が必要であった。最初の 3 つの例では成分がすべて 0 である「普通の零ベクトル」がそれである。行列は成分がすべて 0 である零行列がそれである。多項式の場合零元は定数 0(定数も次数 0 の多項式と見る)，連続関数の場合は恒等的に 0 である関数を o と書くと (つまり任意の $x\in I$ に対し $o(x)=0$) それが零元になる。フィボナッチ数列の場合は $a_1=0$，$a_2=0$ となる数列が零元である (このときすべての自然数 n に対し $a_n=0$)。最後の微分方程式の解空間の場合の零は連続関数の場合と同じ $o(x)$ である ($o(x)$ は V の元になる)。

演習問題 3.1 例 3.1 の例がベクトル空間になる事をチェックせよ。
演習問題 3.2 次を示せ。

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_0$ がゼロベクトルの性質を持てば $\boldsymbol{v}_0=\boldsymbol{0}$ である。(これからゼロベクトルは唯 1 つである事が分かる)

(2) $\boldsymbol{v}$ に対し逆元の性質をもつベクトル $\boldsymbol{v}_1$ が存在すれば $\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}'(=-\boldsymbol{v})$ である。(これから逆元は唯 1 つである事が分かる)

(3) ある 1 つのベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}$ が成立すれば $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ である。

演習問題 3.3 ベクトル空間 V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ と任意のスカラー α に対し次が成立する事を示せ。

(1) $(-1)\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}$

(2) $0\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o}$

(3) $\alpha\boldsymbol{o}=\boldsymbol{o}$