線型解析 II 要綱 #4

2002–10–10　　河野

3.2　線型写像

定義 3.3 線型空間 V から線型空間 U への写像 T が次の 2 つの条件を満たす時**線型写像** (*linear map*) という。

(1) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して

$$T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$$

(2) V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意のスカラー α に対し

$$T(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x})$$

最初にいくつかの例を見よう。

例 3.4 (1) $V = U = \boldsymbol{R}$ とする。実数上の線型写像とは正比例の事である。T を V から U への線型写像とすると，実数 a が存在して任意の実数 x に対し $y = T(x) = ax$ が成立する。

(2) $V = U = \boldsymbol{C}$ とする。複素数上の線型写像も (複素数の意味での) 正比例である。複素数 α が存在して，任意の複素数 z に対し $w = T(z) = \alpha z$ が成立している。しかし，これは複素平面から複素平面への写像であるから α をかけるとどうなるか考えてみよう α の絶対値を r, 偏角を θ とすると，$\alpha = re^{i\theta}$ と表わされる (オイラーの公式：$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$)。$e^{i\theta}$ をかける事は θ だけ回転させる事だし，r をかける事は原点からの距離を r 倍にする事になる。よって複素数での正比例とは，ある角度だけ回転させその後長さを何倍かにしたものである。

(3) $V = U = \boldsymbol{K}^2$ とする。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2\,;\boldsymbol{K})$ に対し $T : V \longrightarrow V$ を

$$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \qquad (\boldsymbol{x} \in V)$$

で定義すると T は線型写像である。

(4) $V = \boldsymbol{K}^n, U = \boldsymbol{K}^m$ とする。ここで m, n は自然数。m, n 行列 A を 1 つ固定する。この A に対し写像 $T : V \to U$ を $T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義すると，T は線型写像である。

(5) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$, $U = \boldsymbol{R}^2$ とする。

$\mathrm{pr} : \boldsymbol{R}^3 \longrightarrow \boldsymbol{R}^2$ を

$$\mathrm{pr}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で定義すると pr は正射影 (projection) と呼ばれる線型写像である。pr を V に制限した写像 g は V から U への線型写像を与える。

(6) $V = U = M(2\,; \boldsymbol{K})$ とする。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2\,; \boldsymbol{K})$ に対し V から V への写像 T を

$$T(X) = AX \qquad (X \in V)$$

で定義すると T は V から V への線型写像である。

$S(X) = XA$ と定義すると，S も V から V への線型写像である。行列なので勿論 $S \neq T$ である。

(7) $V = U = \boldsymbol{R}[x]$ とおき，$f(x) \in V$ に対しその導関数を与える多項式 $f'(x)$ を対応させる写像を D とする。

$$D(f(x)) = f'(x)$$

この時 D は線型写像である。これを $\boldsymbol{R}_n[x]$ に制限したものも $\boldsymbol{R}_n[x]$ の線型写像である。

(8) $V = C(I)$ とする $(I = [0,1])$。$\boldsymbol{R}$ を 1 次元ベクトル空間と見る。V から $\boldsymbol{R}$ への写像 J を

$$J(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

で定義すると J は線型写像である。また $f \in V$ に対し

$$g(x) = \int_0^x f(x)dx$$

を対応させる写像を K とする。つまり $K(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(x)dx$ とする。この K は $C(I)$ から $C(I)$ への線型写像である。

(9) $V = U$ をフィボナッチ数列全体のつくる線型空間とするとする。$\boldsymbol{a} = \{a_i\}$ に対し $\boldsymbol{b} = \{b_i\}$ を $b_i = a_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ とすると，$\boldsymbol{a} \in V$ のとき $\boldsymbol{b} \in W$ が分る。$\boldsymbol{a}$ に対し $\boldsymbol{b}$ を対応させる (シフトと呼ばれる) 写像を S とすると S は線型写像である。

(10) $V = U = \{\, y \mid\ y'' - y' - 2y = 0 \,\}$ とする。$y(x) \in V$ に対し $y'(x) \in W$ となるので $y(x)$ に対しその導関数 $y'(x)$ を対応させる写像 D が定義できるがこれは線型写像である。

演習問題 3.4　例 3.4 を証明せよ。

定義 3.5 線型空間 V から U への線型写像 T が 1 対 1 上への写像[11]である時 T を**同型写像** (*isomorphism*) という。2 つの線型空間の間に同型写像が存在する時 V と U は**同型** (*isomorphic*) であるといい，$V \cong U$ と書く。

例 3.4 でいうと

(1) $a \neq 0$ のとき同型，そうでない時は同型でない。

(2) $\alpha \neq 0$ のとき同型，そうでない時同型でない。

(3) $\det A = ad - bc \neq 0$ の時 T は同型写像，そうでない時は同型写像でない。

[11] $f : X \longrightarrow Y$ が 1 対 1 とは $f(x_1) = f(x_2)$ なら $x_1 = x_2$，上への写像とは任意の $y \in Y$ に対し $y = f(x)$ となる元 $x \in X$ が存在する事である。

(4) $m \neq n$ のときは同型写像にならない。$m = n$ のとき，A が正則行列であれば同型写像，そうでなければ同型写像でない。ただしこの事実の証明は今与える事は難しい。行列式・基本変形を扱ってから示す。

(5) pr は同型写像ではないが，g は同型写像である。

(6) $\det A \neq 0$ の時同型写像，そうでないとき同型写像でない。

(7) (7) の D は同型写像でない。

(8) J, K は同型写像でない。

(9) S は同型写像である。

(10) (10) の D は同型写像である。

演習問題 3.5　上の事実を証明せよ。

演習問題 3.6　T を線型空間 V から U への線型写像，S を U から W への線型写像とすると S と T の合成写像 ST は V から W への線型写像であることを示せ。また，T が同型写像の時逆写像 T^{-1} も線型写像であることを示せ。