線型解析 II 要綱 #5　　2002–10–17　　河野

3.3 部分空間

線型空間には例 3.1 の (1)(2) と (3)，(7) と (8) などの様にそれ自身がある線型空間の部分集合になっているような線型空間もある。それを部分空間と呼ぶ。定義は以下の様に与えられる。

定義 3.6 線型空間 V の部分集合 W で

(1) $V \neq \emptyset$

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$ に対し $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in W$

(3) 任意の $\alpha \in \boldsymbol{K}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{w} \in W$ に対し $\alpha\boldsymbol{w} \in W$

の 3 つの条件を満たすものを (V の) **部分空間** (*subspace*) といい，

$$W < V$$

と表わす。

演習問題 3.7 線型空間 V の部分空間 W が V の演算に関して線型空間になることを示せ。

定義 3.7 T を線型空間 V から U への線形写像とする。このとき $\mathrm{Im}(T) = \{\, \boldsymbol{y} \in U \mid \ \boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in V \,\}$ を線型写像 T の**像** (*imarge*) と呼ぶ。$\ker(T) = \{\, \boldsymbol{x} \in V \mid \ T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \,\}$ を線型写像 T の**核** (*kernel*) という。$\mathrm{Im}(T) < U$, $\ker(T) < V$ が成立する ($\rightarrow$ 演習問題 3.8)。

演習問題 3.8 T を V から U への線型写像とするとき $\mathrm{Im}(T) < U$, $\mathrm{Ker}(T) < V$ を示せ。

例 3.8 (1) A を (m, n) 行列とする。この時

$$\mathrm{Ker}(T_A) = \{\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \mid \ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o} \,\}$$

$$\mathrm{Im}(T_A) = \{\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m \mid \ \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n \,\}$$

と置くと，$\mathrm{Ker}(T_A)$ は $\boldsymbol{K}^n$ の，$\mathrm{Im}(T_A)$ は $\boldsymbol{K}^m$ の部分空間である。

具体例を考えよう。$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$ とする。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とする。このとき $\mathrm{Ker}(T_A)$, $\mathrm{Im}(T_A)$ を具体的に書き表してみよう。$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は 4 つの 1 次方程式で表されるが，変形すると 2 つの方程式

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ x + 2y + 3z + 4w &= 0 \end{aligned}$$

と同値である事が分かる。よって x, y は z, w を用いて $x = z + 2w$, $y = -2z - 3z$ と書けるので，$\mathrm{Ker}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} z+2w \\ -2z-3w \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; z, w \in \boldsymbol{K} \right\}$ となる。$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}$ とすると，$Y - X = 4(x+y+z+w)$, $Z - X = 8(x+y+z+w)$, $W - X = 12(x+y+z+w)$ なので X と Y を用いて $Z = -X + 2Y$, $W = -2X + 3Y$ と書けるので，$\mathrm{Im}(T_A) = \left\{ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -X+2Y \\ -2X+3Y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{K}^4 \;\middle|\; X, Y \in \boldsymbol{K} \right\}$ となる。

(2) $\boldsymbol{K}_n[x], \boldsymbol{K}[x]$ を例 3.1 の (6) のものとすると，$\boldsymbol{K}_n[x]$ は $\boldsymbol{K}[x]$ の部分空間である。$\boldsymbol{K}_2[x]$ を考える。この集合の元は 2 次以下の多項式なので $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ と書ける。もう 1 つの元を $g(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ とすると，$f(x) + g(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$ となり和も 2 次式である。スカラー倍も同様にできる。

(3) $I = [0, 1]$ とする。$C(I), D(I)$ を例 3.1 の (7)，(8) とすると，$D(I)$ は $C(I)$ の部分空間である。

(4) V を全ての実数列全体が作る線型空間 (例 3.1(11)), F をフェボナッチ数列全体からなる線型空間 (例 3.1(12)) とする。この時 F は V の部分空間である。

(5) 例 3.1 の (13) の線型微分方程式

$$L : y'' - y' - 2y = 0$$

の実数解全体からなる線型空間を De(L) とおくと De(L) は $D(\boldsymbol{R})$ の部分空間である。

解を複素数解全体とするとそれは $D(\boldsymbol{R}; \boldsymbol{C})$ の部分空間になる。

(6) V を線型空間，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ を V の部分集合とする。この時

$$\{\, c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k \mid\; c_i \in \boldsymbol{K} \,\}$$

は V の部分空間になる。

(7) V を線型空間とする時，$W = \{\boldsymbol{o}\}$ と V は V の部分空間である。これを**自明な部分空間** (*trivial subspace*) と呼ぶ。

演習問題 3.9　例 3.8 を証明せよ。

定義 3.9 例 3.8(6) の部分空間を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ で生成される部分空間といい，$< \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n >$ で表し，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ で**生成される部分空間**という。

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k$$

を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の**線型結合** (*linear combination*) という。