線型解析 II 要綱 #6

2002–11–5　　河野

3.4　1 次独立，基と次元

3 次元のベクトルについて「1 次独立，基底，次元」を考えた。線型空間においても同様のものを考える事ができる。

定義 3.10 線型空間 V のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s$ が次の性質をもつとき **1 次独立** (*linearly independent*) であるという：即ち「スカラー $c_1, \dots, c_s$ に対し

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{o}$$

が成立していれば $c_1 = \cdots = c_s = 0$」

演習問題 3.10　次のベクトルの組が 1 次独立かどうか調べよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}$ ただし a, b は各自の出席番号の下 2 桁と 1 桁。

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ p \end{pmatrix}$ ここで p, q はある定数。

定義 3.11 一般の線型空間 V に対し次の性質をもつベクトルの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が存在する時これをこの線型空間の**基底** (*base*) と呼ぶ。

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}_1 \dots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する。即ち $V = < \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n >$ が成立する。

(2) $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である。

数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ についていえば基本ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ は基底である。

演習問題 3.11　基本ベクトル $\{\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ が $\boldsymbol{K}^n$ の基底である事を示せ。

演習問題 3.12　$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$ の基底である事を示せ。また $1, x, \dots, x^n$ は $\boldsymbol{R}_n[x]$ の基底である事を示せ。

数ベクトル空間でも扱った様に基底は一通りではない。例えば，ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^2$ において $\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおくと定義 3.11 の (1),(2) の性質を満たす。よって $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$ は基底

である。$\boldsymbol{K}^2$ では一般に $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ がお互いに相手のベクトルのスカラー倍でなければ $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ は基底になる。$\boldsymbol{K}^2$ の基底は色々あるが個数はすべて 2 個である。後で示すように一般の線型空間についても基底が存在する場合，基底には色々あっても個数は一定である事が分る。そこでこの一定の数を線型空間の次元と定義したい。その前に基底の性質を明らかにするいくつかの命題を証明する。

命題 3.12 線型空間 V の元 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ が 1 次独立の時次の 2 つは同値。

(1) ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しスカラー $a_1, \ldots, a_s$ が存在して

$$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_s\boldsymbol{v}_s$$

(2) ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ は 1 次独立でない。

証明　(1)⇒(2)　$\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_s\boldsymbol{v}_s$ とすると

$$(-1)\boldsymbol{v} + a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_s\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{o}$$

が成立するが，$-1 \neq 0$ なので 1 次独立でない。

(2)⇒(1)　1 次独立でないとするとどれかは 0 でないスカラー $a, a_1, \ldots, a_s$ が存在して

$$a\boldsymbol{v} + a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_s\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{o}$$

が成立する。ここで $a = 0$ とすると $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ の 1 次独立性に反するので $a \neq 0$。よって移行して

$$\boldsymbol{v} = \left(-\frac{a_1}{a}\right)\boldsymbol{v} + \cdots + \left(-\frac{a_s}{a}\right)\boldsymbol{v}_s$$

が得られる。∎

命題 3.12 により $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が基底であるとは極大な—つまり他のベクトルを加えると 1 次独立でなくなる様な— 1 次独立なベクトルの集合である事が分る。つまり，$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が基底である必要十分条件は次の 2 つが成立する事である。

(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立である事。つまりスカラー $a_1, \ldots, a_n$ に対し

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o} \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \cdots = a_n = 0$$

が成立する。

(2) 極大である。つまり，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し

$$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$$

は 1 次独立でない。

これは基底を見つける方法を与える。V を線型空間とする。最初に $\boldsymbol{o}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}_1$ を持ってくる[12]。次にベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1$ が 1 次独立なものを捜す。$< \boldsymbol{v}_1 >= V$ ならこの様なベクトルが存在せず，$\{\boldsymbol{v}_1\}$ が基底になる。$< \boldsymbol{v}_1 > \subsetneqq V$ のとき，1 次独立なものが存在するので，それを $\boldsymbol{v}_2$ とする。次にベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が 1 次独立なものを捜す。$< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 >= V$ のとき，この様なベクトルが存在せず，$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ が基底になる。$< \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 > \subsetneqq V$ のとき 1 次独立なものがするので，それを $\boldsymbol{v}_3$ とする。次にベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が 1 次独立なものを捜す。この操作を続けていく。線型空間が有限次元[13] であればこの操作はいつかは終わる。終わらない場合もある。例えば $\boldsymbol{R}[x]$ はその例である。$\boldsymbol{v}_0 = 1, \boldsymbol{v}_1 = x, \ldots, \boldsymbol{v}_n = x^n, \ldots$ といくらいっても終わらない。この場合線型空間は無限次元[14]であるという。

演習問題 3.13　ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立である事と次は必要十分である。「任意の $i = 1, \ldots, n$ に対し，$< \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1} > \subsetneqq < \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_i >$ が成立する。ただし，$<>= \{\boldsymbol{0}\}$ とする。

次元を定義するためには次の定理が必要になる。

定理 3.13 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$,$\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}$ を V の 2 つの基底とすると $m = n$ である。

定理 3.13 を示すために次の補題を用意する。

補題 3.14 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を線型空間 V の基底とする。$\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r$ が 1 次独立の時 $(r \leqq n)$ $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の番号を適当につけ変えると

$$\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$$

は V の基底となる。

証明　r についての帰納法で示す。
(1) $r = 1$ の時。$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は基底なのでスカラー $a_1, \ldots, a_n$ が存在して

$$\boldsymbol{f}_1 = a_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n \boldsymbol{v}_n \tag{1}$$

と書ける。すべての i について $a_i = 0$ なら $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{o}$ で $\boldsymbol{f}_1$ の 1 次独立性に矛盾。$a_i \neq 0$ となる i が存在するが適当に番号を付け替えて $a_1 \neq 0$ としてよい。この時

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{a_1}\boldsymbol{f}_1 + \left(-\frac{a_2}{a_1}\right)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \left(-\frac{a_n}{a_1}\right)\boldsymbol{v}_n$$

と書ける事に注意しておく。これを

$$\boldsymbol{v}_1 = b_1 \boldsymbol{f}_1 + b_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n \boldsymbol{v}_n$$

と書き直しておく。さて $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ が基底になる事を示す。V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しスカラー $c_1, \ldots, c_n$ が存在して

$$\boldsymbol{v} = c_1 \boldsymbol{v}_1 + c_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n \boldsymbol{v}_n$$

[12] ここで注意 : o でないベクトルが存在しない場合がある。V が零ベクトルのみからなる線型空間 $(V = \{o\})$ の場合である。この場合 0 個の基底が存在すると思い 0 次元という事にする。
[13] きちんとした定義はあとでやる。→ 定義 3.15
[14] 無限次元空間は量子力学等で大切ではあるが，この講義においてはほとんど取り上げない。

と書ける。このとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= c_1\left(b_1\boldsymbol{f}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n\right) + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \\ &= c_1b_1\boldsymbol{f}_1 + \left(c_1b_2 + c_2\right)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \left(c_1b_n + c_n\right)\boldsymbol{v}_n\end{aligned}$$

と表す事ができる。次は 1 次独立性を示す。

$$c_1\boldsymbol{f}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o} \tag{2}$$

とする。式 (2) に式 (1) を代入すると

$$c_1(a_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n) + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$$

これを整理すると

$$c_1a_1\boldsymbol{v}_1 + (c_1a_2 + c_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (c_1a_n + c_n)\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}$$

1 次独立性より $c_1a_1 = 0$。$a_1 \neq 0$ より $c_1 = 0$ が得られる。$c_1 = 0$ のとき $\boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立性より $c_2 = \cdots = c_n = 0$。よって 1 次独立も示された。
(2) $r = s$ の時成立を仮定して $s + 1$ の時の成立を示す。

$$\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_s, \boldsymbol{v}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$$

は V の基底になっているので，$\boldsymbol{f}_{s+1}$ に対しスカラー $a_1, \ldots, a_n$ が存在して

$$\boldsymbol{f}_{s+1} = a_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + a_s\boldsymbol{f}_s + a_{s+1}\boldsymbol{v}_{s+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n \tag{3}$$

と表す事ができる。$a_{s+1} = \cdots = a_n = 0$ だと $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_{s+1}$ の 1 次独立性に反する。$a_i \neq 0$ となる $i\ (s + 1 \leqq i \leqq n)$ が存在するが番号を適当に入れ替えて $a_{s+1} \neq 0$ としてよい。この時

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{s+1} &= \left(-\frac{a_1}{a_{s+1}}\right)\boldsymbol{f}_1 + \cdots + \left(-\frac{a_s}{a_{s+1}}\right)\boldsymbol{f}_s + \left(\frac{1}{a_{s+1}}\right)\boldsymbol{f}_{s+1} \\ &\quad + \left(-\frac{a_{s+2}}{a_{s+1}}\right)\boldsymbol{v}_{s+2} + \cdots + \left(-\frac{a_n}{a_{s+1}}\right)\boldsymbol{v}_n\end{aligned}$$

と書ける事に注意しておく。これを

$$\boldsymbol{v}_{s+1} = b_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + b_{s+1}\boldsymbol{f}_{s+1} + b_{s+2}\boldsymbol{v}_{s+2} + \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n$$

と書き直しておく。$\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_s, \boldsymbol{v}_{s+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ は基底なので V の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しスカラー $c_1, \ldots, c_n$ が存在して

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{f}_s + c_{s+1}\boldsymbol{v}_{s+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

と書ける。このとき

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= c_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{f}_s + c_{s+1}\left(b_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + b_{s+1}\boldsymbol{f}_{s+1} + b_{s+2}\boldsymbol{v}_{s+2} + \cdots + b_n\boldsymbol{v}_n\right) \\ &\quad + c_{s+2}\boldsymbol{v}_{s+2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \\ &= \left(c_1 + c_{s+1}b_1\right)\boldsymbol{f}_1 + \cdots + \left(c_s + c_{s+1}b_s\right)\boldsymbol{f}_s + \left(c_{s+1}b_{s+1}\right)\boldsymbol{f}_{s+1} \\ &\quad + \left(c_{s+2} + c_{s+1}b_{s+2}\right)\boldsymbol{v}_{s+2} + \cdots + \left(c_n + c_{s+1}b_n\right)\boldsymbol{v}_n\end{aligned}$$

と表す事ができる。次は 1 次独立性を示す。

$$c_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + c_{s+1}\boldsymbol{f}_{s+1} + c_{s+2}\boldsymbol{v}_{s+2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o} \tag{4}$$

とする。式 (4) に式 (3) を代入すると

$$\begin{aligned} c_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + c_s\boldsymbol{f}_s + c_{s+1}\left(a_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + a_s\boldsymbol{f}_s + a_{s+1}\boldsymbol{v}_{s+1} + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n\right) \\ + c_{s+2}\boldsymbol{v}_{s+2}\cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

これを整理すると

$$\begin{aligned} (c_1 + c_{s+1}a_1)\,\boldsymbol{f}_1 + \cdots + (c_s + c_{s+1}a_s)\,\boldsymbol{f}_s + (c_{s+1}a_{s+1})\,\boldsymbol{v}_{s+1} \\ + (c_{s+2} + c_{s+1}a_{s+2})\,\boldsymbol{v}_{s+2} + \cdots + (c_n + c_{s+1}a_n)\,\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o} \end{aligned}$$

1 次独立性より $c_{s+1}a_{s+1} = 0$。$a_{s+1} \neq 0$ より $c_{s+1} = 0$ が得られる。$c_{s+1} = 0$ のとき $c_1 = \cdots = c_n = 0$ が得られ 1 次独立も示される。 ∎

さて定理 3.13 の証明をしよう。$n < m$ と仮定する。補題 3.14 を用いて基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を置き換えていくと $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ が基底である事が分る。この時 $\boldsymbol{f}_{n+1}$ は $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n$ で表す事ができるので 1 次独立性に矛盾。よって $n \geqq m$。$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ と $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}$ の役割を入れ替えると同様に $n \leqq m$ も示す事ができる。故に $n = m$ が得られる。 ∎

定理 3.13 より次の定義が許される。

定義 3.15 $\boldsymbol{K}$ 上の線型空間 V が n 個のベクトルからなる基底

$$\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$$

を持つ時この線型空間 V の ($\boldsymbol{K}$ 上の) **次元** (*dimension*) は n であるという。この次元を $\dim_{\boldsymbol{K}} V$ と表す。$\boldsymbol{K}$ が明らかな時は省略して $\dim V$ とも書く。またこの時線型空間 V は有限次元であるという。有限個の基底を持たない時無限次元という[15]。量子力学では無限次元複素線型空間を取り扱う事が必要になるが，この講義では有限次元空間を中心に扱う。

[15]'無限個の基底' という概念もあるがこの講義では取り扱わない。