線型解析 II 要綱 #7

2002–11–12　　河野

命題 3.16　(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が 1 次独立ならば $\dim V \geqq n$ である。

(2) $V = < \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n >$ ならば $\dim V \leqq n$ である。

証明　(1) 補題 3.14 は，1 次独立なベクトルの組に対しベクトルを付け加えて基底にできる事も意味している。よって $\dim V \geqq n$ である。
(2) $V = < \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n >$ のとき，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立でなければ演習問題 3.13 より，あるベクトル $\boldsymbol{v}_k$ が存在して，$< \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}, \boldsymbol{v}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n >= V$ となる。1 次独立でない場合はこれを繰り返す。この議論より $\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の部分集合 $\boldsymbol{v}_{\alpha(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}_{\alpha(s)}$ (ここで $s \leqq n$) が V の基底である事が分かり，$\dim v = s \leqq n$ が分かる。 ∎

前期に証明を保留していた次の事実もこの命題からすぐ従う。

3 項数ベクトルに関して，4 個以上のベクトルの組は 1 次独立ではない。

証明　3 項数ベクトル空間では，基本ベクトルが基底になるので，次元は 3 である。もし 4 個以上のベクトルの組が 1 次独立なら命題 3.16 より次元が 4 以上になり矛盾。よって 4 個以上のベクトルは 1 次独立でない。 ∎

演習問題 3.14　次のベクトル空間の次元を求めよ。

(1) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x + 5y = 0, x + 3y = 0 \right\}$

(2) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; x + 5y = 0 \right\}$

(3) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + 3z = 0 \right\}$

(4) $V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^4 \;\middle|\; x + 4y - z + w = 0, 2x + 3y + z - 4w = 0 \right\}$

例 3.1 で取上げた空間について考える。$\boldsymbol{K}^n$ は n 次元である (演習問題 1.17)。$\boldsymbol{R}_n[x]$ は $n+1$ 次元である (演習問題 3.12)。線型部分空間 $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$ は 2 次元である (演習問題 3.12)。(m, n) 行列全体のなす空間 $M(m, n; \boldsymbol{K})$ は mn 次元である。$\boldsymbol{R}_n[x]$ は $n+1$ 次元である (演習問題 3.12)。$\boldsymbol{R}[x]$ と $C(I)$ は無限次元である。

演習問題 3.15

(1) $M(m,n)$ が mn 次元である事を示せ。

(2) $\boldsymbol{R}[x]$ と $C(I)$ が無限次元である事を証明せよ。

F を例 3.1(12)，つまりフィボナッチ数列全体のつくる線型空間とする。F の次元が 2 である事を示す。フィボナッチ数列は初項と第 2 項を決めると

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \tag{5}$$

という関係式によって全体が決まる事を注意しておく。$\boldsymbol{v}_1 = \{x_i\}$ を $x_1 = 1, x_2 = 0$ となるフィボナッチ数列，$\boldsymbol{v}_2 = \{y_i\}$ を $y_1 = 0, y_2 = 1$ となるフィボナッチ数列とする。$\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ が F の基底になる事を示す。$\boldsymbol{o} = \{z_i\}$ $(z_1 = 0, z_2 = 0, \ldots)$ なので $a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{o}$ とすると，第 1 項と第 2 項を比べる事により $a = 0, b = 0$ を得るので 1 次独立は示された。次に任意のフィボナッチ数列 $\boldsymbol{a} = \{a_i\} \in F$ が $\boldsymbol{v}_1$,$\boldsymbol{v}_2$ で表される事を示す。$a_1 = a_1 1 + a_2 0 = a_1 x_1 + a_2 y_1$，$a_2 = a_1 0 + a_2 1 = a_1 x_2 + a_2 y_2$ が成立している。任意の i について $a_i = a_1 x_i + a_2 y_i$ が成立する事を帰納法で示す[16]。

i, $i-1$ について成立を仮定する。式 (5) より

$$a_{i+1} = a_i + a_{i-1} = a_1 x_i + a_2 y_i + a_1 x_{i-1} + a_2 y_{i-1} = a_1(x_i + x_{i-1}) + a_2(y_i + y_{i-1}) = a_1 x_{i+1} + a_2 y_{i+1}$$

よって $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2$ が成立する。

De(L) を例 3.1(13)，つまり線型微分方程式

$$y'' - y' - 2y = 0$$

の解全体のつくる線型空間とする。De(L) の次元は 2 である事を示す。そのためには微分方程式に関する次の定理を必要とする。証明は微分方程式の本にでているので省略 (定理はもっと一般的に証明される)。

定理 3.17 n 階の (定係数) 線型微分方程式

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

を考える[17]。n 個の初期値 $y(0) = b_0, y'(0) = b_1, \ldots, y^{(n-1)}(0) = b_{n-1}$ に対し，それを初期値に持つ微分方程式の解関数が唯一つ存在する。

定理 3.17 より $y_1(x)$ を $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ をみたす De(L) の元，$y_2(x)$ を $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ をみたす De(L) の元とすると，$\{y_1(x), y_2(x)\}$ が基底になる。$ay_1(x) + by_2(x) = 0$ のとき $x = 0$ を代入して，$a = ay_1(0) + by_2(0) = 0$ を得る。また与式を微分すると $ay_1'(x) + by_2'(x) = 0$。$x = 0$ を代入すると $b = ay_1'(0) + by_2'(0) = 0$ を得る。$y(x)$ を De(L) の任意の元とする。$y(0) = a$, $y'(0) = b$ とおくと $y(x)$ も $ay_1(x) + by_2(x)$ も同じ初期値を持つ線型微分方程式 $y'' - y' - 2y = 0$ の解である。定理 3.17 の解の一意性より $y(x) = ay_1(x) + by_2(x)$ が得られる。

[16] ここで数学的帰納法について一言。高校では “(1) $r = 1$ で成立” と “(2) r で成立 $\Longrightarrow r+1$ で成立” の 2 つからすべての自然数についての成立を導くタイプが殆どであったと思う。ここで考えたように “(1) $r = 1, 2$ で成立” “(2) r と $r+1$ で成立 $\Longrightarrow r+2$ で成立” の 2 つから導く事もできる。また “(1) $r = 1$ で成立” “(2) r より小さい全てで成立 $\Longrightarrow r$ で成立” というタイプもある。

[17] $y^{(n)}$ は y の n 次導関数である。