線型解析 II 要綱 #8

2002–11–14　　河野

次元を定義したので，線型写像に関連する命題を紹介しておこう。

定理 3.18 [**次元定理**] $T : V \to U$ を線型空間 V から線型空間 U への線型写像とする。このとき次が成立する。

$$\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$$

証明　$\mathrm{Ker}(T)$ の次元を s とし，$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_s$ を $\mathrm{Ker}(T)$ の基底とする。$\mathrm{Im}(T)$ の次元を t とし，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_t$ を $\mathrm{Im}(T)$ の基底とする。このとき各 j $(j = 1 \ldots, t)$ に対し，$T(\boldsymbol{w}_j) = \boldsymbol{u}_j$ となるベクトルを選ぶ。ベクトルの組 $\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_t$ が V の基底である事が示されれば，$\dim(V) = s+t$ となり定理が示される。

まず 1 次独立性 : $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{v}_s + \beta_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots \beta_t\boldsymbol{w}_t = \boldsymbol{0}$ が成立しているとする。これを T で写すと，$T(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{0}$ $(i = 1, \ldots, s)$ なので，$\boldsymbol{0} = T(\boldsymbol{0}) = T(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{v}_s + \beta_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots \beta_t\boldsymbol{w}_t) = \alpha_1 T(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + \alpha_s T(\boldsymbol{v}_s) + \beta_1 T(\boldsymbol{w}_1) + \cdots \beta_t T(\boldsymbol{w}_t) = \beta_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \beta_t\boldsymbol{u}_t$ となる。ここで $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_t$ は 1 次独立なので $\beta_1 = \cdots = \beta_t = 0$ である。よって $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{0}$ が成立する。ここで $\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_s$ の 1 次独立性より $\alpha_1 = \cdots = \alpha_s = 0$ が得られ，$\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_t$ の 1 次独立性が従う。

生成する事 : V の任意のベクトル v を持って来る。$T(\boldsymbol{v})$ は $\mathrm{Im}(T)$ の元なので，スカラー $\beta_1, \ldots, \beta_t$ が存在して，$T(\boldsymbol{v}) = \beta_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \beta_t\boldsymbol{u}_t$ と書ける。ここで $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \beta_1\boldsymbol{w}_1 - \cdots - \beta_t\boldsymbol{w}_t$ とおく。$T(\boldsymbol{w}) = T(\boldsymbol{v}) - \beta_1 T(\boldsymbol{w}_1) - \cdots - \beta_t T(\boldsymbol{w}_t) = T(\boldsymbol{v}) - \beta_1\boldsymbol{w}_1 - \cdots - \beta_t\boldsymbol{w}_t = 0$ となるので，$\boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}(T)$ である。よってスカラー $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ が存在して $\boldsymbol{w} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{v}_s$ と書ける。これから $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{v}_s + \beta_1\boldsymbol{w}_1 + \cdots + \beta_t\boldsymbol{w}_t$ が得られ，$\boldsymbol{v}_1 \ldots, \boldsymbol{v}_s, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_t$ が V を生成する事が分かる。

命題 3.19 $T : V \to U$ を線型空間 V から線型空間 U への線型写像とする。このとき $\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{0}\}$ である事は T が一対一写像であるための必要十分条件である。

証明　$\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{0}\}$ とする。$\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}'$ に対し $T(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{v}')$ とする。このとき $T(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}') = T(\boldsymbol{v}) - T(\boldsymbol{v}') = \boldsymbol{0}$ なので $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' \in \mathrm{Ker}(T)$，よって $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{0}$，故に T は一対一である。

T が一対一とする。$\boldsymbol{v} \in \mathrm{Ker}(T)$ とすると，$T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} = T(\boldsymbol{0})$ なので，$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$。よって $\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{0}\}$

命題 3.20 $U \subset V$ に対し $\dim(U) = \dim(V)$ ならば $U = V$ である。

証明　$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を U の基底とすると，これは V の基底でもある。任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対しスカラー $\alpha_1 \ldots, \alpha_n$ が存在して $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n$ と書ける。各 i $(i = 1, \ldots, n)$ に対し $\boldsymbol{v}_i \in U$ なので，$\boldsymbol{v} \in U$ が分かる。 ∎

これらから分かる事を確認しておこう。まず $\dim(V) \neq \dim(U)$ なら，どの様な写像 $T : V \to U$ に対しても，T は同型写像にならない事が分かる (尤もこれは定義から分かることではあるが…)。T が同型写像なら $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$，$\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(U)$ となるので，$\dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(U)$ となる。

また $\dim(V) = \dim(U)$ のとき，$\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{0}\}$ が成立すれば，T は同型写像になる。これは $\dim(U) = \dim(V) = \dim(\mathrm{Im}(T))$ から従う。勿論 $\dim(U) = \dim(\mathrm{Im}(T))$ から T が同型写像という事も分かるが，$\mathrm{Ker}(T)$ に関する条件に比べれば示しにくい。

3.5　基底を用いたベクトル空間の表現

数ベクトル空間は成分で表示されているので取扱に色々便利な点が多い。一般のベクトル空間 (有限次元の場合) でも同様の表現を考えたい。以下この節ではベクトル空間は有限次元のものだけをあつかい，いちいち断らない。表現を見る準備として数ベクトル空間に於ける座標変換を見よう。例えば $V = \boldsymbol{K}^2$ において

$$\boldsymbol{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を考えると $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$ は V の基底になっている。ベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\boldsymbol{K}^2$ の基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2$$

と現わすことができた。

$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$ では

$$\boldsymbol{v} = \frac{x+y}{2}\boldsymbol{f}_1 + \frac{y-x}{2}\boldsymbol{f}_2$$

と表される。通常の座標系で成分 x, y を持つベクトル $\boldsymbol{v}$ は $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$ では成分 $\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{y-x}{2}$ を持つと考える事ができる。

この事を線型写像の言葉を用いると次の様に表現する事ができる。V の基底 $\mathsf{E} = \{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$ に対し V から $\boldsymbol{K}^2$ への写像 φ_{E} が次の様に定義される。

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{に対し} \varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} \dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{y-x}{2} \end{pmatrix}$$

この時 φ_{E} は線型写像でしかも同型である。

演習問題 3.16　次の場合に $\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{v})$ を求めよ。

(1) $V = \boldsymbol{R}^2$，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} . \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(2) $V = \boldsymbol{R}^3$，$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \boldsymbol{v}_3\}$，$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

数ベクトル空間 $\boldsymbol{K}^n$ には基本ベクトルからなる ‘自然’ な基底が存在する。数ベクトル空間でない一般の (有限次元) ベクトル空間の場合 (標準的かどうかはさておき) にはその様なものは存在しないが，与えられた基底に関して同様の事は考える事ができる。次の定義を与える。

定義 3.21 V をベクトル空間，$\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ をその基底とする。3.4 節の結果より V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対しスカラー $x_1, \ldots, x_n$ が存在して

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$$

と書ける。しかもこの書き表し方は 1 通りである。この時 V から $\boldsymbol{K}^n$ への写像 φ_{E} を

$$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

で定義する。

命題 3.22 定義 3.21 で定義した φ_{E} は V から $\boldsymbol{K}^n$ への線型写像であり，しかも同型である。

証明 $\boldsymbol{x}$,$\boldsymbol{y} \in V$ が

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n \\ \boldsymbol{y} &= y_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + y_n\boldsymbol{v}_n \end{aligned}$$

と表わされているとする。この時

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (x_n + y_n)\boldsymbol{v}_n$$

となるので

$$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) + \varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{y})$$

が成立する。また

$$\alpha\boldsymbol{x} = \alpha x_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha x_n\boldsymbol{v}_n$$

より

$$\varphi_{\mathsf{E}}(\alpha\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x})$$

も成立するので φ_{E} は線型写像である。

同型写像である事を示すには命題 3.19 より，$\dim \mathrm{Ker}(T) = 0$ つまり $\mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{o}\}$ を示せばよい。$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}(T)$ とすると，$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ つまり

$$\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{v}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n$$

よって $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$。 ∎

例としてフィボナッチ数列全体の作る線型空間 F を考えよう。前にやったように $\boldsymbol{v}_1=\{x_i\}$ ($x_1=1, x_2=0$ となるフィボナッチ数列) と $\boldsymbol{v}_2=\{y_i\}$ ($y_1=0, y_2=1$ となるフィボナッチ数列) に対し $\mathsf{E}=\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ が基底であった。$\boldsymbol{a}=\{a_i\}$ は $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2$ と表されるので，$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{a})=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と表される。この写像 φ_{E} はフィボナッチ数列全体の作る線型空間 F から $\boldsymbol{R}^2$ への同型写像を与える。

次に微分方程式 $y''-y'-2y=0$ の解空間を De(L) について考える。ただし考える関数は実関数とする。即ち実数 $\boldsymbol{R}$ 上の線型空間を考える。前にやった様に $y_1(x)$ を $y_1(0)=1, y_1'(0)=0$ をみたす De(L) の元，$y_2(x)$ を $y_2(0)=0, y_2'(0)=1$ をみたす De(L) の元とすると，$\mathsf{E}=\{y_1(x), y_2(x)\}$ は De(L) の基底であった。De(L) の任意の元 y は実数 a_1, a_2 を用いて，$y=a_1y_1+a_2y_2$ と書く事ができる。この φ_{E} は De(L) から $\boldsymbol{R}^2$ への同型写像である。

次に別の基底を取った場合を考える。$w_1(x)$ を $w_1(0)=1$, $w_1'(0)=1$ をみたす De(L) の元，$w_2(x)$ を $w_2(0)=1$, $w_2'(0)=-1$ をみたす De(L) の元とすると，$\mathsf{F}=\{w_1(x), w_2(x)\}$ も De(L) の基底となる (演習問題 3.17)。このとき y に対し $y=b_1w_1+b_2w_2$ となる実数 b_1, b_2 が存在し，$\varphi_{\mathsf{F}}(y)=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とするとき，φ_{F} も De(L) から $\boldsymbol{R}^2$ への同型写像になる。このとき $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ はどの様な関係にあるだろうか。E は基底なので $w_1=c_1y_1+c_2y_2$ となる実数 c_1, c_2 が存在する。この式に $x=0$ を代入すると，$c_1=1$ を得る。微分して $x=0$ を代入すると，$c_2=1$ を得る。$w_2=d_1y_1+d_2y_2$ となる実数が存在するが，これも同様にして $d_1=1, d_2=-1$ が分かる。これを $y=b_1w_1+b_2w_2$ に代入すると，$y=(b_1+b_2)y_1+(b_1-b_2)y_2$ が分かる。即ち $a_1=b_1+b_2$, $a_2=b_1-b_2$ が得られる。行列の形で書くと

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

となる。

一般に線型空間 V の 2 つの基底 $\mathsf{E}=\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ と $\mathsf{F}=\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ に対し，$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{v})=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\varphi_{\mathsf{F}}(\boldsymbol{v})=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ とおくとき，ある n 次行列 A が存在して

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

となる。

演習問題 3.17 $w_1(x), w_2(x)$ が De(L) の基底である事を示せ。

演習問題 3.18　2 つの $\boldsymbol{K}$ 上のベクトル空間 V,W に関して有限次元であって次元が等しければ V と W は同型である事を示せ。

V の次元が n である時命題 3.22 よりベクトル空間としては $\boldsymbol{K}^n$ と同じものであると考えることができる。これを '基底によるベクトル空間 V の表現' という。1 つ基底を決めると $\boldsymbol{K}^n$ への同型写像が決まるが，基底を取り替えると別の対応になる。数ベクトル空間と違って '自然な' 基底は存在しないのでどれが '自然な' 表現であるかということは決めるわけにはいかない。先程の例でいうと $\varphi_{\mathsf{F}}(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるが，$\varphi_{\mathsf{E}}(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となっている。「第 2 成分が 1 である」という性質は基底の選びかたによるので線型空間 '固有' の性質とはいえない。