線型解析 II 要綱 #9

2002–11–19 河野

3.6 行列による線型写像の表現

数ベクトル空間でない場合でも有限次元なら線型写像を行列表示する事ができる。ただし，数ベクトル空間の時と違って標準的な座標系というものが無いのでそれぞれのベクトル空間に対し座標系を１つ決めて初めて対応が定まる。前節の定理 2.9 の一般化として次の定理が得られる。

定理 3.23 V を n 次元ベクトル空間，W を m 次元ベクトル空間とする。$\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底，$\mathsf{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}$ を W の基底とする。V から W への線型写像 T に対し行列 $A \in M(m, n\,; \boldsymbol{K})$ が存在して任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $A\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\mathsf{F}} T(\boldsymbol{x})$ が成立する。つまり，$\boldsymbol{y} = T(\boldsymbol{x})$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し

$$\varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \varphi_{\mathsf{F}}(\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

が成立する。

証明 命題 3.22 より V の基底 E に対応して同型写像 $\varphi_{\mathsf{E}} : V \to \boldsymbol{K}^n$ が存在する。同様に同型写像 $\varphi_{\mathsf{F}} : W \to \boldsymbol{K}^m$ も存在する。$\varphi_{\mathsf{E}}^{-1}$ も同型写像なので $\varphi_{\mathsf{F}} T \varphi_{\mathsf{E}}^{-1}$ は $\boldsymbol{K}^n$ から $\boldsymbol{K}^m$ への線型写像になる (演習問題 3.6)。この時定理 2.9 より行列 $A \in M(m, n\,; \boldsymbol{K})$ が存在して任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}^n$ に対し $A\boldsymbol{v} = \varphi_{\mathsf{F}} T \varphi_{\mathsf{E}}^{-1}(\boldsymbol{v})$ が成立する。$\boldsymbol{v} = \varphi_{\mathsf{E}}(\boldsymbol{x})$ と置くと定理が得られる。 ∎

この行列 A の事を基底 E,F に関する T の表現行列という。定理 3.23 より行列は「線型写像の表現」と見ることができる。

V から W への線型写像 T を調べる時に，$\varphi_{\mathsf{E}}, \varphi_{\mathsf{F}}$ で $\boldsymbol{K}^n, \boldsymbol{K}^m$ での議論に翻訳して行列 A を調べる事で T の性質を調べようというのが「表現する」という考え方である。

T が V から V 自身への写像の時は１つの基底 $\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ で表すのが普通である。

例を見よう。ベクトル空間 $V = \boldsymbol{R}_2[x]$ と V 上の線型写像 D について考える。基底として

$$\mathsf{E} = \{1, x, x^2\} = \{f_0(x), f_1(x), f_2(x)\}$$

を考える。$Df_0(x) = 0$, $Df_1(x) = f_0(x)$, $Df_2(x) = 2f_1(x)$ なので

$$\varphi_{\mathsf{E}}(Df_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_{\mathsf{E}}(Df_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_{\mathsf{E}}(Df_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので微分を表現する行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

になる。

次に線型微分方程式の解空間 $V = \{y \mid y'' - y' - 2y = 0\}$ 上の線型写像 D を考える。$\mathsf{E} = \{y_1(x), y_2(x)\}$ を節 3.5 で定義した基底とする。つまり $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$ となる V の元とする。$y(x) \in V$ が $y(0) = a, y(0) = b$ を満たす時

$$\varphi_{\mathsf{E}}(y(x)) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

である。$z(x) = y'(x)$ とおくと $z'(x) = y''(x) = y'(x) + 2y(x)$ より $z(0) = b$,$z'(0) = 2a + b$ となるので D を表現する行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

になる。

演習問題 3.19

(1) $V = M(2\,;\boldsymbol{K})$,$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対し $T(X) = AX$ とおく (例 3.1,3.4 参照)。

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく時基底 $\mathsf{E} = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$ に関する T の表現行列を求めよ。

(2) (1) と同じく E をとる。$S(X) = XA$ の表現行列を求めよ。

(3) 例 3.4 のフィボナッチ数列全体がつくるベクトル空間上の線型写像 S について節 3.4 で定義した基底 $\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ に関しての表現行列を求めよ。