4　連立 1 次方程式と階数

「連立 1 次方程式を解く」事に関しては前期でも取り上げたし，式変形の途中で何度か出て来た。ここでは最初に基本変形と階数を取り上げ，それと関係させて連立 1 次方程式の一般理論を扱う。

4.1　基本変形

行列に対し「基本変形」と呼ばれるある種の変形を考える。

(1) 行列のある行に他の行のスカラー倍を加える操作，(2) ある行をスカラー倍する操作 (ただしスカラーは 0 ではないとする)，(3) ある行と別の行を交換する操作をまとめて**行基本変形**と言う。列に対しても同じ様な変形が考えられるがこれらを**列基本変形**と言う。両方合わせて**基本変形**と呼ぶ。

定義 4.1 次の様な n 次行列 $P_n(k,\ell), Q_n(k;\lambda), R_n(k,\ell;\alpha)$ を基本行列と呼ぶ。ただし，$P_n(k,\ell) = (p_{ij})$,$Q_n(k;\lambda) = (q_{ij})$,$R_n(k,\ell;\alpha) = (r_{ij})$ と置いた時 $p_{k\ell} = p_{\ell k} = 1$, $p_{ii} = 1(i \neq k,\ell)$, $p_{ij} = 0$(その他の場合)，$\lambda \neq 0$, $q_{kk} = \lambda$, $q_{ii} = 1(i \neq k)$,$q_{ij} = 0$(その他の場合)，$r_{k\ell} = \alpha$,$r_{ii} = 1$,$r_{ij} = 0$(その他の場合) とする。つまり

$$
P_n(k,\ell) = \left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\
 & & & 0 & 1 & & 0 & 0 & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & 0 & & & 1 & 0 & & & \\
 & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right)
$$

$$
Q_n(k;\lambda) = \left(\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \lambda & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right)
$$

$$
R_n(k,\ell;\alpha) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & & & \\
& & 1 & & & & & & & & \\
& & & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha & & & \\
& & & & 1 & & & 0 & & & \\
& & & & & \ddots & & \vdots & & & \\
& & & & & & 1 & 0 & & & \\
& & & & & & & 1 & & & \\
& & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

基本行列 $P_n(k,\ell), Q_n(k;\lambda), R_n(k,\ell;\alpha)$ は正則行列 (逆行列が存在する行列) で，その逆行列，転置行列も基本行列である。

$P_n(k,\ell)^{-1} = P_n(k,\ell), Q_n(k;\lambda)^{-1} = Q_n(k;\dfrac{1}{\lambda}), R_n(k,\ell;\alpha)^{-1} = R_n(k,\ell;-\alpha),$

${}^tP_n(k,\ell) = P_n(k,\ell), {}^tQ_n(k;\lambda) = Q_n(k;\lambda), {}^tR_n(k,\ell;\alpha)^{-1} = R_n(\ell,k;\alpha).$

命題 4.2 基本変形と基本行列をかけることの間には次の関係がある。

(1) A の k 行と ℓ 行を入替える $\Leftrightarrow A \to P_n(k,\ell)A$
A の k 列と ℓ 列を入替える $\Leftrightarrow A \to AP_m(k,\ell)$

(2) A の k 行に 0 でないスカラー λ をかける $\Leftrightarrow A \to Q_n(k;\lambda)A$
A の k 列に 0 でないスカラー λ をかける $\Leftrightarrow A \to AQ_m(k;\lambda)$

(3) A の k 行に ℓ 行のスカラー (α) 倍を加える $\Leftrightarrow A \to R_n(k,\ell;\alpha)A$
A の ℓ 列に k 列のスカラー (α) 倍を加える $\Leftrightarrow A \to AR_m(k,\ell;\alpha)$

基本変形では次の命題が基本的である。

命題 4.3 任意の行列 A に対し適当な基本変形を繰返すと，$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形 (**標準形**ともいう) にできる (O の部分がない場合もある)。
同じ事を基本行列の言葉でいえば，基本行列 $P_1,\ldots,P_t,Q_1,\ldots,Q_s$ が存在して

$$
Q_s\cdots Q_1AP_1\cdots P_t = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}
$$

と書ける。

前期に 3 次行列に関して述べたが，行列が $\begin{pmatrix} E_r & * \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形できれば $\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ の形に変形できる。

略証　すべての成分が 0 という列があれば列基本変形で最後の列に移動する。以下その様な列があればこの操作を行う。すべての成分が 0 なら $r=0$ で証明は終る。0 でない成分をもつ列が存在したとする。行基本変形で $(1,1)$ 成分に移動できる。定数倍をかけて $(1,1)$ 成分を 1 に変える。更に行基本変形で $(i,1)$ 成分 $(i \neq 1)$ を，列基本変形で $(1,j)$ 成分 $(j \neq 1)$ を，0 に変える。

これが終ったら同様の操作を $(2,2)$ 成分を中心として行う。以下同様。 ∎

演習問題 4.1　次の行列に基本変形を行なって標準形にせよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

ただし，a,b,c,d は自分の学生番号の下 4 桁。

4.2　階数の幾つかの定義

定義 4.4 4 種類の階数 (rank) を定義しよう。

(1) 行列 A に基本変形を行ない対角成分以外を 0，対角成分を 0 または 1 にした時の 1 の個数を $\mathrm{rank}_1(A)$ と表す。

(2) $A = (\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ とするとき $\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ のなかの 1 次独立なベクトルの個数の最大値を $\mathrm{rank}_2(A)$ と表す。

(3) $A = {}^t({}^t\boldsymbol{a}^*{}_1 {}^t\boldsymbol{a}^*{}_2 \cdots {}^t\boldsymbol{a}^*{}_m)$ とするとき $\{\boldsymbol{a}^*{}_1, \cdots, \boldsymbol{a}^*{}_m\}$ のなかの 1 次独立なベクトルの個数の最大値を $\mathrm{rank}_3(A)$ と表す。

(4) $I_A = \{\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{K}^m | \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n\}$ の次元 $\dim I_A$ を $\mathrm{rank}_4(A)$ と表す。

定理 4.5 定義 (1)，(2)，(3)，(4) は同じもの。
つまり，$\mathrm{rank}_1(A) = \mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_3(A) = \mathrm{rank}_4(A)$ である。よってこの定理が証明された後はこれを $\mathrm{rank}(A)$ と表す。

$A_0 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ に対し定理 4.5 が正しいのは明らかであろう。だが，一般の場合に定理 4.5 を証明するためには基本変形の性質を調べる事が必要になる。しかし，$\mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_4(A)$ はその知識がなくても証明できるので，それを最初に補題として証明しておく。

補題 4.6 $\mathrm{rank}_2(A) = \mathrm{rank}_4(A)$ が成立する。
証明　$A = (a_{ij}), \boldsymbol{a}_j = (a_{ij}), \boldsymbol{e}_j = (\delta_{ij})$ と置くと，$\boldsymbol{a}_j = A\boldsymbol{e}_j$ より，$\boldsymbol{a}_j \in I_A$。ここで，$\mathrm{rank}_2(A) = r$ とする。$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立としても一般性を失わない。$\boldsymbol{a}_k (k > r)$ に対し，$\{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{a}_k\}$ は 1 次独立ではない。よって $\boldsymbol{a}_k = \beta_{k1}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \beta_{kr}\boldsymbol{a}_r$ と表わすことができる。任意の $\boldsymbol{w} \in I_A$ に対し，$\boldsymbol{w} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{a}_r$ と書ける事を示せば，$\boldsymbol{a}_1 \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が I_A の基底となり，$\mathrm{rank}_4(A) = \dim I_A = r = \mathrm{rank}_2(A)$ がいえる。$\boldsymbol{w}$ に対し $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}^n$ が存在して，$\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{x}$ となる。$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$

と書けるので,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= A\boldsymbol{x} \\
&= A(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \\
&= x_1A\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_nA\boldsymbol{e}_n \\
&= x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \\
&= x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r + x_{r+1}\boldsymbol{a}_{r+1} + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n \\
&= x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r + +x_{r+1}(\beta_{r+11}\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \beta_{r+1r}\boldsymbol{a}_r) + \cdots + x_n(\beta_{n1}\boldsymbol{a}_1 \cdots + \beta_{nr}\boldsymbol{a}_r) \\
&= (x_1 + x_{r+1}\beta_{r+11} + \cdots + x_n\beta_{n1})\boldsymbol{a}_1 + \cdots + (x_r + x_{r+1}\beta_{r+1r} + \cdots + x_n\beta_{nr})\boldsymbol{a}_r
\end{aligned}
$$

となり, よって補題は示された。 ∎