4.3 階数の定義の同値性

定理 4.5 を示すために次の補題を示す。

補題 4.7 P, Q を基本行列とする時,

$$\mathrm{rank}_2(QA) = \mathrm{rank}_2(AP) = \mathrm{rank}_2(A)$$
$$\mathrm{rank}_3(QA) = \mathrm{rank}_3(AP) = \mathrm{rank}_3(A)$$

が成立する。

略証　同様にできるので，$\mathrm{rank}_2(QA) = \mathrm{rank}_2(AP) = \mathrm{rank}_2(A)$ の方だけ証明する。$\mathrm{rank}_2(A) = r$ とすると，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立としても一般性を失わない。この時 $Q\boldsymbol{a}_1, \ldots, Q\boldsymbol{a}_r$ が 1 次独立である事を示す。$\alpha_1 Q\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_r Q\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$ とすると $Q(\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{a}_r) = \boldsymbol{o}$ なので Q^{-1} を両辺にかけると $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{o}$ 得る。これより $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$。よって $\mathrm{rank}_2(QA) \geqq \mathrm{rank}_2(A)$ である。同様の議論を Q に代えて Q^{-1} を用いることにより $\mathrm{rank}_2(QA) \leqq \mathrm{rank}_2(A)$ を得るので $\mathrm{rank}_2(QA) = \mathrm{rank}_2(A)$ は成立する。
$AP = (\boldsymbol{b}_1 \cdots \boldsymbol{b}_n)$ とおく時，次の 3 つの場合について示せばよい。

(1) $P = P_n(k, \ell)$ の時,
$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell, \ldots, \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_\ell, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n$

(2) $Q_n(k; \lambda)$ の時,
$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \ldots, \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_1, \ldots, \lambda\boldsymbol{a}_k, \ldots, \boldsymbol{a}_n$

(3) $R_n(k, \ell; \alpha)$ の時,
$\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \ldots, \boldsymbol{b}_\ell, \ldots, \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots, \alpha\boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_\ell, \ldots, \boldsymbol{a}_n$

(1),(2) は明らかに 1 次独立なベクトルの最大個数は同じであるので $\mathrm{rank}_2(AP) = \mathrm{rank}_2(A)$ は成立する。(3) の場合最初に $\mathrm{rank}_2(AP) \geqq \mathrm{rank}_2(A)$ を証明する。$\mathrm{rank}_2(A) = r$ とし $\{\boldsymbol{a}_{\alpha(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\alpha(r)}\}$ が 1 次独立であるとする。$\alpha(\ell') = \ell$ となる ℓ が存在しない時は $\{\boldsymbol{b}_{\alpha(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}_{\alpha(r)}\}$ も 1 次独立である (実際同じもの)。よって 1 次独立なベクトルの組は必ず $\boldsymbol{a}_\ell$ を含んでいる事を仮定する。$\alpha(\ell') = \ell$ となる ℓ が存在する時は $\ell' = r$ としても一般性を失わない。$\{\boldsymbol{a}_{\alpha(1)}, \ldots, \boldsymbol{a}_{\alpha(r-1)}, \boldsymbol{a}_\ell\}$ が 1 次独立であるとする。$\boldsymbol{a}_k = \alpha_1\boldsymbol{a}_{\alpha(1)} + \cdots + \alpha_{r-1}\boldsymbol{a}_{\alpha(r-1)}$ と書けないとき，$\{\boldsymbol{b}_{\alpha(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}_{\alpha(r-1)}, \boldsymbol{b}_k\}$ が 1 次独立になり仮定に反する。$\boldsymbol{a}_k = \alpha_1\boldsymbol{a}_{\alpha(1)} + \cdots + \alpha_{r-1}\boldsymbol{a}_{\alpha(r-1)}$ と書けるとき $\{\boldsymbol{b}_{\alpha(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}_{\alpha(r-1)}, \boldsymbol{b}_\ell\}$ は 1 次独立である。よって $\mathrm{rank}_2(AP) \geqq \mathrm{rank}_2(A)$ が分かる。$\boldsymbol{a}_\ell = -\alpha\boldsymbol{b}_k + \boldsymbol{b}_\ell$ なので，$\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{b}_i$ の役割を入れ替えることにより $\mathrm{rank}_2(AP) \leqq \mathrm{rank}_2(A)$ が得られるので証明は終わる。 ∎

定理 4.5 の証明　命題 4.3 より行列 A に対し基本行列 $P_1, \ldots, P_t, Q_1, \ldots, Q_s$ が存在して

$$A = Q_s \cdots Q_1 A_0 P_1 \cdots P_t$$

と書ける。ただし $A_0 = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$。この時 $\mathrm{rank}_1(A) = \mathrm{rank}_1(A_0) = r = \mathrm{rank}_2(A_0) = \mathrm{rank}_3(A_0)$ が成立する。補題 4.7 を順に適用することにより

$$\mathrm{rank}_2(A_0) = \mathrm{rank}_2(AP_1) = \cdots = \mathrm{rank}_2(AP_1 \cdots P_t) = \mathrm{rank}_2(Q_1AP_1 \cdots P_t) = \cdots = \mathrm{rank}_2(A)$$

を得る。$\mathrm{rank}_3(A)$ についても同様にできるので O.K. ∎

4.4　連立１次方程式の解法

前節までで定義した階数と基本変形を連立１次方程式の解法に応用して見よう。連立１次方程式を表現する形は色々ある。

$$(E)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

$\boldsymbol{a}_j=(a_{ij}),\ \boldsymbol{b}=(b_i)$ とおくと
$(E_C)\quad \boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\cdots\boldsymbol{a}_nx_n=\boldsymbol{b}$

$A=(a_{ij}),\ \boldsymbol{x}=(x_j)$ とおくと
$(E_M)\quad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$
この時問題は以下の様に定式化される。

(1) $(E),(E_c),(E_M)$ は解を持つのか

(2) 解を持つ時どれくらい有るのか

ここでは (2) の問題を変形する。そのために $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{o}$ の場合を考える。

$$(H)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{a}_j=(a_{ij})$ とおくと
$(H_C)\quad \boldsymbol{a}_1x_1+\boldsymbol{a}_2x_2+\cdots\boldsymbol{a}_nx_n=\boldsymbol{o}$

$A=(a_{ij}),\ \boldsymbol{x}=(x_j)$ とおくと
$(H_M)\quad A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{o}$

命題 4.8 (E) に解が存在する時，(E) の解と (H) の解の間にはは１対１対応がある。
証明　(E) の１つの解を $\boldsymbol{c}_0$ とするとき，$\boldsymbol{c}$ を (H) の解とすると $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}_0$ は (E) の解。逆に任意の (E) の解 $\boldsymbol{d}$ に対し $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}_0$ と置くと $\boldsymbol{c}$ は (H) の解である。

命題 4.8 により (E) に解が存在する場合，その解と (H) の解は１対１対応する。問題 (2) にの『どれぐらい』というときのはかる基準として $W_A=\{\,\boldsymbol{x}\in Kn\mid\ A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\,\}$ の次元 $\dim W_A$ をとる事にする。このとき解答は次の様に述べる事ができる。

定理 4.9 方程式 $(E),(E_C),(E_M)$ が解を持つための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}(A\boldsymbol{b})$$

である。このとき方程式 $(H), (H_c), (H_M)$ の解空間 W_A の次元は $n - \mathrm{rank}\, A$ である。

いきなり証明に入らずに例を見よう。次の方程式を考える。この方程式を解いてみよう。

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x+0y+2z+0w=1 \\ 1x+0y+3z+1w=1 \\ 2x+0y+5z+1w=b+2 \end{array} \right. \qquad \begin{pmatrix} 10201 \\ 10311 \\ 2051b+2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x+0w+2z+0y=1 \\ 1x+1w+3z+0y=1 \\ 2x+1w+5z+0y=b+2 \end{array} \right. \quad \text{（2 列} \leftrightarrow \text{4 列）} \quad \begin{pmatrix} 10201 \\ 11301 \\ 2150b+2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x+0w+2z+0y=1 \\ 1x+1w+3z+0y=1 \\ 1x+0w+2z+0y=b+1 \end{array} \right. \quad \text{（3 行} \to \text{3 行ー 2 行）} \quad \begin{pmatrix} 10201 \\ 11301 \\ 1020b+1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x+0w+2z+0y=1 \\ 1x+1w+3z+0y=1 \\ 0x+0w+0z+0y=b \end{array} \right. \quad \text{（3 行} \to \text{3 行ー 1 行）} \quad \begin{pmatrix} 10201 \\ 11301 \\ 0000b \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1x+0w+2z+0y=1 \\ 0x+1w+1z+0y=0 \\ 0x+0w+0z+0y=b \end{array} \right. \quad \text{（2 行} \to \text{2 行ー 1 行）} \quad \begin{pmatrix} 10201 \\ 01100 \\ 0000b \end{pmatrix}$$

この例の場合，$b=0$ の時のみ解が存在する事が分る。$\mathrm{rank}\, A = 2$ であり，$\mathrm{rank}(A\boldsymbol{b})$ は $b=0$ のときは 2，$b \neq 0$ のときは 3 である。解が存在する時，例えば y, z は自由に決められ，その値に対応して x, w が決る。解は $\begin{pmatrix} 1-2z \\ y \\ z \\ -z \end{pmatrix}$ と書ける。対応する (H) の解空間は $W_A = \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ y \\ z \\ -z \end{pmatrix} \middle| \; z, y \in \boldsymbol{K} \right\}$ で $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が 1 次独立であることから $\dim W_A = 2(4($変数の個数 $=$ 列の数$) - 2($対角成分の 1 の個数$))$ である。この例を一般化すると次の命題が得られる。これは定理 4.9 と同値である。

命題 4.10 行列 $(A|\boldsymbol{b})$ は行基本変形と列の入替え（ただし，$\boldsymbol{b}$ の列は入替えない）で次の形に変形できる。

$$\left(\begin{array}{cc|c} E_r & C & \boldsymbol{b}_1' \\ O & O & \boldsymbol{b}_2' \end{array} \right)$$

ここで，$r = \mathrm{rank}(A)$。この時 (E) が解をもつ必要十分条件は $\boldsymbol{b}_2' = \boldsymbol{o}$ であり，(H) の解空間の次元は $n - \mathrm{rank}\, A$ である。

命題 4.10 を証明すれば定理 4.9 も示されたことになるが，ここでは基本変形によらない形の証明を与えておこう。

定理 4.9 の証明　$\mathrm{rank}(A)=r$ とする時 $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r\}$ が 1 次独立としても一般性を失わない。$\mathrm{rank}(A\ \boldsymbol{b})\geqq\mathrm{rank}(A)$ は明らかなので $\mathrm{rank}(A\ \boldsymbol{b})=\mathrm{rank}(A)$ を示すためには $\{\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}\}$ が 1 次独立でない事，つまり $\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_r$ で表す事ができる事を示せばよい。$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ となるベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在する時，補題 4.6 の議論と同様に，$\boldsymbol{b}=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\alpha_r\boldsymbol{a}_r$ と書けるので，よって解が存在すれば $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}(A\boldsymbol{b})$ である。逆に $\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}(A\boldsymbol{b})$ のときは 1 次独立性の議論よりあるスカラー $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ ($\alpha_{r+1}=\cdots=\alpha_n=0$ にとれる) が存在して $\boldsymbol{b}=\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{a}_n$ と書ける。この時 $\boldsymbol{x}={}^t(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ は (E) の解になる。

$\dim W_A=s$ とした時 $n=s+\mathrm{rank}\,A$ である事を示す。$\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_s$ を W_A の基とする。$\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_r(r=\mathrm{rank}\,A)$ を I_A の基とする。各ベクトル $\boldsymbol{b}_i(i=1,\ldots,r)$ に対し $A\boldsymbol{v}_i=\boldsymbol{b}_i$ となるベクトル $\boldsymbol{v}_i$ を 1 つ決める。この時

$$\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_s,\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r$$

が基である事が示されれば，$\boldsymbol{K}^n$ の次元は n なので定理は証明される。

$\alpha_1\boldsymbol{w}_1+\cdots+\alpha_s\boldsymbol{w}_s+\beta_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\beta_r\boldsymbol{v}_r=\boldsymbol{o}$ とする。両辺に A をかけると $A\boldsymbol{w}_i=\boldsymbol{o}$，$A\boldsymbol{v}_j=\boldsymbol{b}_j$ より $\beta_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\beta_r\boldsymbol{b}_r=\boldsymbol{o}$ となる。$\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_r$ の 1 次独立性より $\beta_1=\cdots=\beta_s=0$。更に $\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_s$ の 1 次独立性より $\alpha_1=\cdots=\alpha_s=0$。$\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{K}^n$ の任意のベクトルとする。$A\boldsymbol{x}\in I_A$ なのでスカラー $\beta_1,\ldots,\beta_r$ が存在して $A\boldsymbol{x}=\beta_1\boldsymbol{b}_1+\cdots+\beta_r\boldsymbol{b}_r$ と書ける。この時 $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{x}-\beta_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\beta_r\boldsymbol{v}_r$ と置くと $A\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{o}$ となる。よってスカラー $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ が存在して $\boldsymbol{x}'=\alpha_1\boldsymbol{w}_1+\cdots+\alpha_s\boldsymbol{w}_s$ と書ける。以上により

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{w}_1+\cdots+\alpha_s\boldsymbol{w}_s+\beta_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+\beta_r\boldsymbol{v}_r$$

と書けて $\boldsymbol{K}^n$ の基となる。

4.5　線型写像の表現と基本変形

この章ではいままで行列に関してのみ議論して来た。この節では一般の線型写像とその表現との関係を調べる。

V を n 次元のベクトル空間，W を m 次元のベクトル空間とする。V から W への線型写像 T が与えられているものとする。$\mathsf{E}=\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ を V の基，$\mathsf{F}=\{\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_m\}$ を W の基とする。このとき，E,F に関する表現行列 A が存在した ($A\varphi_{\mathsf{E}}=\varphi_{\mathsf{F}}T$ となる行列)。基を別のものにとりかえたとき，表現行列がどう変わるかを考えよう。

命題 4.11　(1) $\mathsf{E}_1=\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_\ell,\ldots,\boldsymbol{v}_k,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$($k$ 番 目が $\boldsymbol{v}_\ell$，ℓ 番目が $\boldsymbol{v}_k$) とするとき, E_1,F に関する表現行列 A_1 は $AP_n(k,\ell)$

(2) $\mathsf{E}_2=\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\lambda\boldsymbol{v}_k,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ とするとき，E_2,F に関する表現行列 A_2 は $AQ_n(k;\lambda)$

(3) $\mathsf{E}_3=\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_\ell+\alpha\boldsymbol{v}_k,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ とするとき，E_3,F に関する表現行列 A_3 は $AR_n(k,\ell;\alpha)$

(4) $\mathsf{F}_1=\{\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_\ell,\ldots,\boldsymbol{w}_k,\ldots,\boldsymbol{w}_m\}$($k$ 番目が $\boldsymbol{w}_\ell$，ℓ 番目が $\boldsymbol{w}_k$) とするとき, E,F_1 に関する表現行列 A_4 は $P_n(k,\ell)A$

(5) $\mathsf{F}_2=\{\boldsymbol{w}_1,\ldots,\lambda\boldsymbol{w}_k,\ldots,\boldsymbol{w}_m\}$ とするとき，E,F_2 に関する表現行列 A_5 は $Q_n(k;\lambda)A$

(6) $\mathsf{F}_3 = \{\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_\ell + \alpha\boldsymbol{w}_k, \ldots, \boldsymbol{w}_m\}$ とするとき，E, F_3 に関する表現行列 A_6 は $R_n(i,j;\alpha)A$

命題 4.3 を表現行列という言葉で置き換えると次の定理が得られる。

定理 4.12 V を n 次元，W を m 次元のベクトル空間，T を V から W への線型写像とする。このとき V の基 E と W の基 F が存在して，E, F に関する T の表現行列は標準形になる。

基本変形は 1 つ与えた基底から目的の基底を選び出すアルゴリズムも与える。基底の存在だけでよいなら次のような別証明がある。

$\mathrm{Im}(T)$ の基底 $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r$ を取ってくる。各 i $(i = 1, \ldots, r)$ に対し $T(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{f}_i$ となる V のベクトルを決める。また $\mathrm{Ker}(T)$ の基底として $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を取ってくる。$\boldsymbol{f}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ を取ってきて $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m$ が W の基底になるようにする。このとき $\mathsf{E} = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\mathsf{F} = \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}$ と置けばよい。

注意 4.13 この定理は $V = W$ のときは少し注意が必要である。この定理は V の基底 E と $W(= V$ であるが$)$ の基底 F を 2 つとも自由に選んだとき表現行列をこの形にできるという事を言っている。$V = W$ のとき通常は同じ 1 つの基底 E を用いて表現する事が多いが，その場合に標準形にできる事を主張するものではない。