5　行列式

5.1　行列式の定義と性質

n 次行列に対してその行列式を定義しよう。本質的には前期あつかった 3 次の場合と同様であるが次数が高い分見かけは複雑になる。

定義 5.1 $A = (\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n) \in M(n\,; \boldsymbol{K})$ に対し A の行列式 $\det(A) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ をベクトルの n 個の組からスカラーへの写像で次の性質を満たすものとして定義する(18)。

(1) **多重線型性**　各 i $(i = 1, \ldots, n)$ に対し

1) $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}'_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) + \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$

2) $\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \alpha\boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = \alpha \det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$

(2) **交代性**　$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j$ $(i < j)$ の時，$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = 0$

(3) **単位の値**　$\det(E) = 1$　但し，E は単位行列。また，同じことだが，

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$ とすると，$\det(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = 1$。

演習問題 5.1　$\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = -\det(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_i, \ldots, \boldsymbol{a}_j, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ を示せ。

$\det(A)$ のことを $|A|$ とも書く。$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対し

$\det(A) = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right|$ と表すべきかもしれないが普通

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と書く。一般の n について前節と同じ様に計算をして書き下す事もできないわけではないが余り実際的ではない(19)。

定義に基づいて計算していくよりもいくつかの性質を証明しそれを用いて計算を実行した方が効率的である。そのためにいくつかの命題を必要とする。

(18) 厳密に言うとこの様な性質を持つものが存在する事を示す必要がある。それについてはこの節の最後で簡単にふれる

(19) 実際実行してみると 4 次行列の行列式の場合項が 24 個，n 次行列の行列式の場合 $n!$ 個でてくる。

命題 5.2

$$\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i+\alpha\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n)=\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$$
$$\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_i+\alpha\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n)=\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$$

命題 5.3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

命題 5.2 **の証明**　表現のため 2 つ書いただけで本質的には同じもの。

$$\begin{aligned}
&\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i+\alpha\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n)\\
&= \det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n)+\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\alpha\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n)\\
&= \det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n)+\alpha\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n)\\
&= \det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_i,\ldots,\boldsymbol{a}_j,\ldots,\boldsymbol{a}_n) \blacksquare
\end{aligned}$$

命題 5.3 を証明するため次の補題を証明する。

補題 5.4 $F(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$ をベクトルの組からスカラーへの写像で定義 5.1 の (1) 多重線型性 (2) 交代性を満足するものとする。この時 $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ を基本ベクトルとすると

$$F(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)=F(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)\det(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$$

が成立する。

略証　$C=F(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ とおくと $F(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)=C\det(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ が成立する。F,det の交代性より $F(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)=C\det(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ 等が成立する。一般的に書くと $a(1),\ldots,a(n)$ を 1 から n までの自然数を適当に入れ替えたものとすると

$$F(\boldsymbol{e}_{a(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{a(n)})=C\det(\boldsymbol{e}_{a(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{a(n)})。$$

$\boldsymbol{a}_j=a_{1j}\boldsymbol{e}_1+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{e}_n$ とおき多重線型性を使うと $F(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n)$ は $F(\boldsymbol{e}_{a(1)},\ldots,\boldsymbol{e}_{a(n)})$ の和で表す事ができる。よって O.K.。$\blacksquare$

演習問題 5.2　補題 5.4 の証明を完全なものにせよ。

命題 5.3 の証明をしよう。$\boldsymbol{a}'_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n-11}\end{pmatrix},\ldots,\boldsymbol{a}'_{n-1}=\begin{pmatrix} a_{1n-1} \\ \vdots \\ a_{n-1n-1}\end{pmatrix}$ とおき

$$F(\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}'_{n-1})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-11} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

とすると F は $n-1$ 次での多重線型性と交代性を持つ事が分る。定数 $C = F(\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_{n-1})$ とおくと補題 5.4 より $F(\boldsymbol{a}'_1, \ldots, \boldsymbol{a}'_{n-1})$ は $n-1$ 次の行列式の C 倍になる。よって $C = a_{nn}$ である事を示せば証明が終わる。命題 5.2 より，j 列の $-a_{jn}$ 倍を n 列に加えても行列式の値は変らないので

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}|E_n| = a_{nn} \blacksquare$$

演習問題 5.3　テキストから 4 次行列の行列式を計算する問題を選び計算せよ。

定義 5.1 で行列式を定義したが，この様なものが実際に存在する事を証明する必要がある。一般には条件が相矛盾するものであると存在しないという場合もあるからである。存在について簡単にふれるが，証明等の細かいところはテキスト 3 章 §1–2 参照の事。

n を自然数とする。集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を N と書く事にする。N から N への 1 対 1 写像全体の集合を S_n と書き n 次対称群という。また S_n の元を置換という。S_n には合成写像で積を定義する事ができる。S_n の元 σ で，ある 2 つの自然数 i, j に対しては $\sigma(i) = j$,$\sigma(j) = i$ となり，他の自然数は固定するものを ($k \neq i, j$ なら $\sigma(k) = k$) 互換と呼ぶ。この時次が成立する。

定理 5.5 任意の置換は何個かの互換の積として表わされる。この時互換の個数が偶数であるか，奇数であるかは表わし方によらない。

置換 σ が偶数個の置換の積で表わされる時偶置換，奇数個の積で表わされる時奇置換という。記号 sgn を σ が偶置換の時 $+1(\operatorname{sgn}\sigma = 1)$，奇置換の時 $-1(\operatorname{sgn}\sigma = -1)$ で定義する。
演習問題 5.4　テキストを参考にして定理 5.5 を証明せよ。

以上の準備の元で行列式は次の様に定義される。

定義 5.6 $A = (a_{ij}) \in M(n\ ; \boldsymbol{K}\,)$ に対し

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

ただし和において σ はすべての置換を動く。

$n = 2$ の場合具体的に書いてみよう。S_2 の元は $\{1, 2\}$ から $\{1, 2\}$ への 1 対 1 写像なので 2 つ存在する。σ_1 を $\sigma_1(1) = 1$,$\sigma_1(2) = 2$ とし，σ_2 を $\sigma_2(1) = 2$,$\sigma_2(2) = 1$ とする。$\operatorname{sgn}\sigma_1 = 1$,$\operatorname{sgn}\sigma_2 = -1$ である。

$$\det(A) = \operatorname{sgn}\sigma_1 a_{1\sigma_1(1)} a_{2\sigma_1(2)} + \operatorname{sgn}\sigma_2 a_{1\sigma_2(1)} a_{2\sigma_2(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

と具体的に書き下せる。
演習問題 5.5　$n = 3$ の場合定義 5.6 を具体的に書き下せ。
演習問題 5.6　ここで定義した $\det(A)$ が定義 5.1 の (1) 多重線型性,(2) 交代性,(3) 単位の値を満たす事を示せ (テキスト参照の事)。