

## 5.2 行列式の計算 (I)

ここでは命題 5.2, 5.3, 演習問題 5.1 を用いた行列式の計算方法の 1 つを紹介する。つまり, 命題 5.2 を用いて行列式を命題 5.3 の形にする。そして命題 5.3 を用いて  $n-1$  次の行列式に帰着させる。次数を下げていけば 2 次または 3 次の行列式の計算に帰着できる。例を見よう。

$$\begin{aligned} \text{例 5.7} \quad & \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\ & = (-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 80 \end{aligned}$$

定義 5.1 も命題 5.2, 5.3 も列についての命題であった。実はこの事は行についても成立する。つまりある行に他の行のスカラー倍を加えた行列の行列式は元の行列の行列式と等しい等々が成立する。これを示すためにもう一度同じ議論を行について行う必要はない(勿論行ってもよいが)。次の定理を示せば転置行列では行が列に変わるのですべての議論が行でもできる。証明には 5.5 節の命題も使用する。

### 定理 5.8

$$\det({}^t A) = \det(A)$$

**略証**  $T = \{A \in M(n; \mathbf{K}) \mid \det({}^t A) = \det(A)\}$  とおいたとき  $T = M(n; \mathbf{K})$  を示せばよい。まだ示していないが定理 5.9<sup>(20)</sup> と,  ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$  (演習問題 2.4) を用いると  $A, B \in T$  の時  $AB \in T$  が分る。また定義 4.1 の行列に対し

$$P_n(i, j), Q_n(i; \lambda), R_n(i, j; \alpha) \in T$$

は容易に分る。命題 4.3 を用いると任意の行列  $A \in M(n; \mathbf{K})$  に対し  $T$  の元  $A_1, \dots, A_s$  が存在して  $A = A_1 \cdots A_s$  と書ける事が分る。よって  $A \in T$ 。■

## 5.3 積の行列式と逆行列

この節では行列式と逆行列について調べる。目標は 2 次元の場合高校で学んだ ' $\det(A) \neq 0$  なら逆行列が存在する' という命題を一般の場合に証明する事である。まず, 積の行列の行列式に対し次が成立する。

### 定理 5.9 積の行列式

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

<sup>(20)</sup> 定理 5.9 等の証明にこの定理及びその帰結を使わなければ順序の逆転は許される

**証明**  $B = (\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n)$  とおくと  $AB = A(\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n) = (A\mathbf{b}_1 \cdots A\mathbf{b}_n)$ 。よって  $\det(AB) = \det(A\mathbf{b}_1, \dots, A\mathbf{b}_n) = F(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  とおくと  $F$  は多重線型性と交代性を持つ。補題 5.4 より

$$F(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n) = F(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \det(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)。$$

$F(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \det(A)$  なので定理が証明される。■

この定理からは  $A$  が逆行列を持てば  $\det(A) \neq 0$  がでてくる。逆をいうためにはまだ十分ではない。

いくつかの定義を続けよう。 $n$  次行列  $A$  に対しその  $i$  行と  $j$  列を取り除いてできる  $n-1$  次行列を  $A_{ij}$  と書く。

例えば  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  とする。この時  $A_{33}$  は 3 行と 3 列を取り除いた行列なので

$$A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。また  $A_{12}$  は

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

になる。この時次が成立する。

**定理 5.10**  $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$  とし、

$$\tilde{A} = {}^t(\tilde{a}_{ij})$$

とおくとき

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)E_n$$

この定理から次の系が得られる。

**系 5.11** <sup>(21)</sup> $\det(A) \neq 0$  の時  $A$  は逆行列を持ち

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$$

証明の前に先程の例を計算しよう。 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  であった。 $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  より

$\tilde{a}_{11} = (-1)^{(1+1)} \det(A_{11}) = 1$ 。同様に計算すると  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  で

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det(A)E_3。$$

<sup>(21)</sup>この逆行列を求める式は理論的には大切であるが、次数が大きくなると実際の計算には手間がかかりあまり実用的とは言えない。“掃き出し法”と呼ばれる方法があり、これは計算の手間も少ない(コンピュータで逆行列を計算する時用いられている)。これについては 5.5 節で取り上げる。

定理の略証  $\tilde{A}A = \det(A)E_n$  も同様にできるので  $A\tilde{A} = \det(A)E_n$  のみ示す。 $A\tilde{A} = (b_{ij})$  とおく。ここで

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{js} &= (-1)^{j+s} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s-1} & a_{1s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j-11} & \cdots & a_{j-1s-1} & a_{j-1s+1} & \cdots & a_{j-1n} \\ a_{j+11} & \cdots & a_{j+1s-1} & a_{j+1s+1} & \cdots & a_{j+1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns-1} & a_{ns+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s-1} & 0 & a_{1s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j-11} & \cdots & a_{j-1s-1} & 0 & a_{j-1s+1} & \cdots & a_{j-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{j+11} & \cdots & a_{j+1s-1} & 0 & a_{j+1s+1} & \cdots & a_{j+1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns-1} & 0 & a_{ns+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s-1} & a_{1s} & a_{1s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j-11} & \cdots & a_{j-1s-1} & a_{j-1s} & a_{j-1s+1} & \cdots & a_{j-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{j+11} & \cdots & a_{j+1s-1} & a_{j+1s} & a_{j+1s+1} & \cdots & a_{j+1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns-1} & a_{ns} & a_{ns+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

なので,  $b_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is}\tilde{a}_{js}$  より,

$$b_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s-1} & a_{1s} & a_{1s+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{j-11} & \cdots & a_{j-1s-1} & a_{j-1s} & a_{j-1s+1} & \cdots & a_{j-1n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{is-1} & a_{is} & a_{is+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{j+11} & \cdots & a_{j+1s-1} & a_{j+1s} & a_{j+1s+1} & \cdots & a_{j+1n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns-1} & a_{ns} & a_{ns+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

が分かる。よって  $i = j$  の時は  $b_{ij} = b_{ii} = \det(A)$  となる。 $i \neq j$  の時は  $j$  行に  $i$  行目のベクトルを入れたものになっているので  $b_{ij} = 0$  が成立している。■

演習問題 5.7 次の行列が逆行列を持つ時はそれを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

ただし,  $a, b, c, d$  は自分の学生番号の下 4 桁。

ベクトルの 1 次独立と行列式の間には次の様な関係がある事を最後に注意しておく。

命題 5.12  $v_1, \dots, v_n$  を  $K^n$  のベクトルとすると,

$$\det(v_1, \dots, v_n) \neq 0 \iff v_1, \dots, v_n \text{ は 1 次独立}$$

証明 (1)( $\implies$ )  $A = (v_1 \cdots v_n)$  とおき, スカラー  $a_1, \dots, a_n$  に対し  $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \mathbf{o}$  が成立しているとする。系 5.11 より逆行列  $A^{-1}$  が存在するが,  $e_1, \dots, e_n$  を基本ベクトルとすると

$$(e_1 \cdots e_n) = E_n = A^{-1}A = A^{-1}(v_1 \cdots v_n) = (A^{-1}v_1 \cdots A^{-1}v_n)$$

より  $e_i = A^{-1}v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) が成立する。

$$\mathbf{o} = A^{-1}\mathbf{o} = A^{-1}(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

より  $a_1 = \cdots = a_n = 0$ 。

(2)( $\impliedby$ )  $v_1, \dots, v_n$  は基底になるので, 各  $e_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) に対し, スカラー  $b_{i1}, \dots, b_{in}$  が存在して

$$e_i = b_{i1}v_1 + \cdots + b_{in}v_n$$

と書ける。  $B = (b_{ij})$  とおくと

$$(e_1 \cdots e_n) = B(v_1 \cdots v_n)$$

となるので  $E_n = BA$  より  $\det(A) \neq 0$ 。 ■

演習問題 5.8 次のベクトルが 1 次独立かどうか調べよ。ただし  $a, b$  は自分の学生番号の下 2 桁。

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$