5.4　行列式の計算 (II)

定理 5.10 を用いると行列式の計算の 2 つ目の方法 (展開) が得られる。
例で考える。

例 5.13 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}$ を例えば 1 行目で展開すると

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} &= a_{11}\tilde{a}_{11} + a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{13}\tilde{a}_{13} + a_{14}\tilde{a}_{14} \\ &= (-1)^{1+1}1\begin{vmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \\ 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}2\begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 16 \end{vmatrix} \\ &\quad +(-1)^{1+3}3\begin{vmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 9 & 10 & 12 \\ 13 & 14 & 16 \end{vmatrix} + (-1)^{1+4}4\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \\ 13 & 14 & 15 \end{vmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2 行目で展開すると $\det(A) = a_{21}\tilde{a}_{21} + a_{22}\tilde{a}_{22} + a_{23}\tilde{a}_{23} + a_{24}\tilde{a}_{24}$ となる。一般に n 次行列 A に対し，$\det(A) = \displaystyle\sum_{s=1}^{n} a_{is}\tilde{a}_{is}$ を用いると i 行における展開，$\det(A) = \displaystyle\sum_{s=1}^{n} \tilde{a}_{is}a_{is}$ を用いると i 列に関する展開となる。

演習問題 5.9　この節の方法でテキストから適当に問題を選び，行列式を計算せよ。ただし 4 次以上とする。

5.5　基本変形を用いた逆行列の計算

この節では基本変形を用いて逆行列を計算する方法を扱う。

基本変形を行なうとは基本行列をかける事なので，基本変形を何回か行なうということは正則な行列を左右からかける事になっている。この事から次の命題が証明される。これを用いると逆行列の計算が割と楽にできる。

命題 5.14 n 次行列 A が正則ならば行基本変形だけで E_n に変形できる。
正則な n 次行列 A に対し $(A|E_n)$ を行基本変形で $(E_n|B)$ にしたとき，$B = A^{-1}$ である。

変形が途中でできなくなれば正則ではない。コンピュータ等では普通この方法で逆行列を計算する。

証明　命題 4.3 より基本行列 $P_1, \ldots, P_t, Q_1, \ldots, Q_s$ が存在して

$$Q_s \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_t = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで A は正則行列なので右辺は E_n となる。即ち $Q_s \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_t = E_n$ となる。ここで両辺に右から P_t^{-1} をかけると $Q_s \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_{t-1} = Q_s \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_t P_t^{-1} = E_n P_t^{-1} = P_t^{-1}$ となる。さらに両辺に左から P_t をかけると，$P_t Q_s \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_{t-1} = P_t P_t^{-1} = E_n$ となる。以下これを繰り返していくと，$P_1 \cdots P_t Q_s \cdots Q_1 = E$ を得る。この事は A は行基本変形だけで E_n に変形できる事を示している。

$(A|E_n)$ を行基本変形で $(E_n|B)$ にしたとき，基本行列の積でかける行列 X が存在して $X(A|E_n) = (E_n|B)$ となっている。このとき $XA = E_n$, $XE_n = B$ となるので，$X = A^{-1}$ かつ X_B よって $B = A^{-1}$ となる。

演習問題 5.10　次の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$