線型解析 I 要綱 #15　　2003–1–21　　河野

6　固有値・固有ベクトルと対角化

前期に 2×2 行列の対角化を学んだ。この章では一般の行列の対角化及びその応用を扱う。

6.1　固有値・固有ベクトル

定義 6.1

(1) **線型写像に対する固有値・固有ベクトル**　V をベクトル空間とし，$f : V \to V$ を線型写像とする。スカラー λ と $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在して $f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$ となる時，λ を f の固有値と言い，$\boldsymbol{v}$ を（λ に属する）f の固有ベクトルと言う。

$$W(\lambda) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid f(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}\}$$

を λ に属する f の固有（ベクトル）空間と言う。

(2) **行列に対する固有値・固有ベクトル**　n 次行列 A に対し，スカラー λ と $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して，$A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ となる時，λ を A の固有値と言い，$\boldsymbol{x}$ を（λ に属する）A の固有ベクトルと言う。

$$W(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}\}$$

を λ に属する A の固有（ベクトル）空間と言う。

(3) **固有方程式**　$\Phi_A(t) = \det(tE_n - A)$ を A の固有多項式といい，方程式，$\Phi_A(t) = 0$ を A の固有方程式という。また，この方程式の複素数における解を特性解をいう。

定義 6.1 の (1) と (2) は次の様な関係にある。

命題 6.2 V を n 次元ベクトル空間，$f : V \to V$ を線型写像とする。$E = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基底とし，A を E に対する表現行列とする。

(1) λ を f の固有値，$\boldsymbol{v}$ を λ に属する f の固有ベクトルとする。このとき $\boldsymbol{x} = \varphi_E(\boldsymbol{v})$ は λ に属する A の固有ベクトルである。

(2) λ を A の固有値，$\boldsymbol{x}$ を λ に属する A の固有ベクトルとする。このとき $\boldsymbol{v} = \varphi_E^{-1}(\boldsymbol{x})$ は λ に属する f の固有ベクトルである。

命題 6.3 固有方程式 $\Phi_A(t) = 0$ の $\boldsymbol{K}$ における解は A の固有値である。逆に固有値は固有方程式の解である。

この命題は次の補題からすぐ出てくる。

補題 6.4 $\det(B) = 0$ という事はあるゼロでないベクトル $\boldsymbol{x}$ が存在して $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となることの必要十分条件である。

証明　(1)($\Longleftarrow$) 対偶を示す。$\det(B) \neq 0$ の時系 5.11 より逆行列が存在するので $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の左から B^{-1} をかけると $\boldsymbol{x} = B^{-1}B\boldsymbol{x} = B^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$，よって O.K.

(2)($\Longrightarrow$)$B = (\boldsymbol{v}_1 \ldots \boldsymbol{v}_n)$ とおくと命題 1.30 より $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立でない。この時どれかは 0 ではない実数 $a_1, \ldots, a_n$ が存在して，

$$a_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \tag{6}$$

が成り立つ。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ とおいて式 6 を書き直すと

$$B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

が得られる。 ▮

命題 6.3 は $B = tE_n - A$ とおけばでてくる。

演習問題 6.1 次の行列の固有値固有ベクトルを求めよ。

0) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

命題 6.5 n 次行列 A が対角化可能である必要十分条件は n 個の 1 次独立な固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が存在する事である。この時，$P = (\boldsymbol{u}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{u}_n)$ とおき，$A\boldsymbol{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ とすると，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$ は対角行列。

証明

$$AP = A(\boldsymbol{u}_1 \ldots \boldsymbol{u}_n) = (\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \ldots \lambda_n \boldsymbol{u}_n) = (\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \ldots \lambda_n \boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{u}_1 \ldots \boldsymbol{u}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

が成立する。命題 1.30 より逆行列 P が存在するので O.K. ▮