6.3　応用 (I)—フィボナッチ数列

フィボナッチ数列の一般項を固有値・固有ベクトルの議論を用いて求めよう。前でやった事をまとめておこう。

(1) $V = Fib(2) = \{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a} = \{a_i\}$ は $a_{i+2} = a_{i+1} + a_i$を満たす。$\}$ はベクトル空間になる。

(2) $\boldsymbol{e}_1 = \{x_i\}$ を $x_1 = 1, x_2 = 0$ となるフィボナッチ数列 $\boldsymbol{e}_2 = \{y_i\}$ を $y_1 = 0, y_2 = 1$ となるフィボナッチ数列とすると，$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ が $Fib(2)$ の基になる。

(3) $F(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}$ を $\boldsymbol{b} = \{b_i\}$ としたとき $b_i = a_{i+1}$ で定義すれば F は V 上の線型写像である。

(4) この時 V に基として $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ を選んでおくと F を表現する行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ である。

固有値を計算すると $\Phi_A(t) = \det(tE_n - A) = t^2 - t - 1 = 0$ より $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ である。$\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおきそれぞれに対応する固有ベクトルを求める。$\boldsymbol{x} = \{a_i\}$ が固有値 α に属する A の固有ベクトルである時 $A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}$ をといて $a_2 = \alpha a_1$ が得られる。このとき $a_i = a_1\alpha^{i-1}$ が分る。よって α_1 に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{f}_1 = \{\alpha_1^{i-1}\}$，$\alpha_2$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{f}_2 = \{\alpha_2^{i-1}\}$ とおく。初項 a，第 2 項 b のフィボナッチ数列 $\boldsymbol{a} = \{a_i\}$ は $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_1 + b\boldsymbol{e}_2$ と書き表された。これを $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2$ で書くと

$$\boldsymbol{a} = \frac{b - a\alpha_2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{f}_1 + \frac{a\alpha_1 - b}{\sqrt{5}}\boldsymbol{f}_2$$

なので

$$a_n = \frac{b - a\alpha_2}{\sqrt{5}}\alpha_1^{n-1} + \frac{a\alpha_1 - b}{\sqrt{5}}\alpha_2^{n-1}$$

を得る。

6.4　応用 (II)—線型微分方程式

$$V = \{y \mid y'' - y' - 2y = 0\}$$

に固有値・固有ベクトルの議論を適用して解を求めてみよう。前でやった事をまとめておこう。

(1) V には和とスカラー倍が定義されベクトル空間となる。

(2) y_1 を $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ を満たす V の関数, y_2 を $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$ を満たす V の関数とすると，y_1, y_2 は V の基。

(3) $D : V \longrightarrow V$ を $D(y) = \dfrac{dy}{dx}$ で定義すると D は V 上の線型写像。

(4) この時 V に基として $\{y_1(x), y_2(x)\}$ を選んでおくと D を表現する行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ である。

最初に最も簡単な形の微分方程式 (変数分離型) を解いておこう。

命題 6.9 微分方程式 $y' = ay$ の一般解は $y = Ce^{ax}$ である。

証明　最初に $y(x_0) \neq 0$ となる x_0 が存在するとして解く。このとき $\dfrac{y'}{y} = a$ なので両辺を x で積分すると，$\log|y| = ax + C_1$ となる。このとき $|y| = e^{C_1}e^{ax}$ となり，$y = \pm e^{C_1}e^{ax}$ となる。ここで改めて $C = \pm e^{C_1}$ とおくと，$y = Ce^{ax}$ となる。

前述の x_0 が存在しないとき，$y = 0$ という恒等的に 0 に等しい定数関数になる。この関数は微分方程式を満たしている。このときは $C = 0$ と思うとやはり $y = Ce^{ax}$ という形をしている。 ∎

固有値を計算すると $\Phi_A(t) = \det(tE_n - A) = 0$ より，-1,2。固有値 -1 に対応する固有ベクトルは $f(y) = -y$, つまり $\dfrac{dy}{dx} = -y$ となるもの。$z_1(x) = e^{-x}$ を選ぶ。同様に，2 に対応する固有ベクトルとして $z_2(x) = e^{2x}$ を選ぶ。この時 $\{z_1(x), z_2(x)\}$ は V の基になるので一般の V の元 y は $y = az_1(x) + bz_2(x)$ と書ける，つまり $y = ae^{-x} + be^{2x}$ が一般解。

ここで一般の 2 階の線型微分方程式

$$y'' + ay' + by = 0$$

に関して考えよう。y を複素関数と考えるか，実関数と考えるかで違いが出て来る。

最初は複素関数と考える場合を取り上げる。このとき $V = \{y \mid \ y'' + ay' + by = 0\}$ は $\boldsymbol{C}$ 上のベクトル空間である。y_1 を $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ を満たす解，y_2 を $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$ を満たす解とする。このとき $D(y_1) = -by_2$, $D(y_2) = y_1 - ay_2$ となるので，表現行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$ となる。

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ b & t+a \end{vmatrix} = t^2 + at + b = 0 \tag{9}$$

(9) の 2 解を α, β とする。よって D の固有ベクトル (固有関数) は α, β である。この固有値に対応する固有ベクトルは $z_1(x) = e^{\alpha x}$, $z_2(x) = e^{\beta x}$ である。(9) が異なる 2 解を持つとき，これらは 1 次独立なので，z_1, z_2 が V の基底となり，一般解は $y = cz_1 + dz_2$ と書ける。

(9) が重解を持つときは $a^2 - 4b = 0$ となり，固有値は $\alpha = -a/2$ がただ 1 個だけである。このとき固有ベクトル (固有関数) は $z_1 = e^{\alpha x}$ しか存在しない。しかし固有ベクトル (固有関数) ではないが $z_2 = xe^{\alpha x}$ が解関数になる事が分かるので，一般解は $y = cz_1 + dz_2$ と書ける。

次に実関数の場合を考える。$a^2 - b \geqq 0$ のときは複素数の場合と全く同じであるが，$a^2 - b < 0$ のとき解が実数ではないので変わってくる。$\alpha = p + iq$ とおくとき，$\alpha, \overline{\alpha}$ が (9) の 2 解である。このとき $e^{\alpha x}$ は実関数ではない。実関数の場合，もう一度最初からやり直す方法も考えられるが，ここでは複素数の結果を使う事を考える。$z_1 = e^{\alpha x} = e^{(p+iq)x} = e^{px}e^{iqx} = e^{px}(\cos qx + i \sin qx)$ である。

同様に $z_2 = e^{\overline{\alpha}x} = e^{px}(\cos qx - \sin qz)$ を得る。これを組み合わせた $w_1 = \dfrac{z_1 + z_2}{2} = e^{px}\cos qx$, $w_2 = \dfrac{z_1 - z_2}{2i} = e^{px}\sin qx$ も微分方程式の解である。そして w_1, w_2 は実関数であるので，これが V の基底になる。よって一般解は $y = cw_1 + dw_2$ と表される。

演習問題 6.4　次の微分方程式を複素関数と見て解け。さらに 2 番については実関数と見て解け。

(1) $y'' - 5y' + 6y = 0$

(2) $y'' + y = 0$

(3) $y'' - 2y' + y = 0$