線形解析 I 要綱 #1

2003–4–10　河野

ガイダンス

最初は数学的イントロではなく，非数学的イントロ—つまりガイダンス。

(1) 私語禁止。勿論数学的質問は随時 (私の話している途中でも) してかまわない。

(2) 出席はとらない。成績は基本的に試験で判断する。補助的に演習, レポートも用いる事がある。

(3) 教室への出入りは自由ではない。途中入室・途中退室は自由だが，再度入室する意思をもって退室する場合は私の許可をとってから退室して下さい。ただし,「タバコを吸いたい」「電話をかけたい」等の理由は原則不許可。

(4) 携帯電話について：電源 OFF でなくてもよいが，1) 音が出ないようにする，2) 時計以外の機能を使用しない，という条件で使用する事。

(5) 大学の数学についての注意。

1) 大学は講義だけ聞いて理解できるという想定をしていない。講義が演習・実験と比較して，同じ時間で単位数が多いのは，講義と同じ時間の予習・復習 (合わせて講義時間の 3 倍) をする事を前提としている。

2) 講義をしっかり聞き分からない所はその場で質問をするようにして欲しい。もちろん後での質問がダメという意味ではなく，質問は随時受け付けている。今年から e–mail での質問も受け付けている (address は下記の web page 参照)。

3) 内容的にも変化がある。高校では，問題を解くのが中心で，所謂「模範解答」というものが有った。しかし大学では中身 (定義・定理) を正確に (論理的に) を理解するという事が中心になる。問題はその補助手段と考えた方が良い。

4) 上と関連して，演習問題の解答をプリントにして配るという事はしない。所謂「正解」と比べて自分の解答の正誤を判断するのではなく，自分の力で正誤を判断して欲しいからそうしている。今年から「演習問題の解説」を 2 週遅れぐらいで web page に載せようと考えています。

5) 大学の先生は高校の先生程「親切」ではない。学生を「大人」として扱う。自分から action を起こさない限りめんどうは見てくれない。

6) 次は『数学 7 つの迷信』(小針宏) より—興味のある人は図書館へ (多分あると思う)。

1. 数学はむつかしく，数学のできる人は頭がよい。
2. 数学は計算技術である。
3. 記号は文字でなく，数式は言葉でない。
4. 公理は絶対自明の真理である。
5. 数学は答えの決まった問題を解く事である。
6. 数学は頭の体操として人間に役に立つ。
7. 数学と政治は無関係。

この講義はテキストとは少し違う進み方をする。今のところ章立ては線形解析 I 及び II を通して次の様に考えている

(1) 3 次元ベクトルと 3 次行列の世界
(2) n 次元ベクトルと (m,n) 行列
(3) 連立 1 次方程式と階数
(4) 行列式
(5) 固有値・固有ベクトルと対角化
(6) 線形微分方程式

なおこれから講義で配るプリントは http://math.cs.kitami-it.ac.jp/~kouno/kougi.html に pdf 形式で置く予定です。ここには昨年までの要綱及びテストも置いてあるので，参考にして下さい。演習問題の解説もここに載せる予定です (講義での配布は今の所考えていません)。

1　3 次元ベクトルと 3 次行列の世界

最初に高校の復習も兼ねて (数学 B，数学 C を履修していない人にとっては初めてだが)，3 次元ベクトル空間及び 3 次行列に関して学ぶ。ここでやる事は後の章で n 次元ベクトル，n 次行列へと一般化される。

1.1　3 次元ベクトル空間

この節では 3 次元ベクトルと 3 次元ベクトル空間について述べる。この概念は後に n 次元ベクトル空間へと拡張される。3 次元ベクトルは幾何的なものととらえる事もできるが，拡張されるとその様な見方はできなくなる。ベクトルに対し幾何学的なイメージを持つ事は重要であるが，概念が拡張されたときに，幾何学的イメージにとらわれず抽象的に考える事も重要である。

高校ではベクトル横ベクトルとして

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

と書いていたが，線型解析では (ある理由があって; そのうちわかるかナ) 通常縦**ベクトル** (*vector*)[1] で

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

と書く。3 次元ベクトル全体の集合を $\boldsymbol{R}^3$ で表し，3 **次元ベクトル空間** (*3–dimensional vector space*) という。2 つのベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ が等しいとは $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_3 = y_3$ を意味し，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ と書く。

[1] ドイツ語 Vektor，もともとはラテン語の vectus(運搬) からきている。

集合であるベクトル空間とその元であるベクトルをきちんと区別できない人がいるので十分注意する事。特に部分集合を表す記号

$$\left\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, \boldsymbol{x}\text{は}\cdots\text{の性質を持つ} \right\}$$

をきちんと理解する様に (この記号は部分空間の所で取り扱う)。

3 次元ベクトル空間には和と実数倍が以下の様に定義される。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し和を

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

で，また実数 α とベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し実数倍を

$$\alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$$

と定義する。

ベクトルの概念の発生地は物理学である。高校時代「数学 B」で扱ったようにベクトルは歴史的には「方向と大きさを持った量」と定義された。力，速度等がその様な量である。力等を考えた場合，始点の位置が問題になる。物理学では始点の位置を問題にする見方と，それを問題にせず，平行移動したものも等しいと見る 2 通りの考え方がある。始点の位置を問題にする場合**拘束ベクトル**，しない場合**自由ベクトル**という言い方をする事がある。数学で扱うベクトルはこの表現では自由ベクトルにあたる。

(自由) ベクトルに対し，始点を原点に平行移動したものを考える。このときベクトルとベクトルの終点を対応させる事により，3 次元ベクトル空間の元であるベクトルと 3 次元ユークリッド空間の点が一対一に対応する。この様に見たときベクトルを**位置ベクトル**と呼ぶ。3 次元ベクトル空間を $\boldsymbol{R}^3$ という記号で書いたのも，この見方から来ている (更に付け加えて言えば，成分表示している事は，このユークリッド空間に直交座標を 1 つ固定して考えている事を意味する)。

和と実数倍に関しては次の 8 つの性質が**基本的**である。

命題 1.1 (1) [結合法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ に対し $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$

(2) [交換法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対し $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$

(3) [零ベクトルの存在] 零ベクトルと呼ばれるベクトル $\mathbf{0}$ が存在して任意のベクトルについて $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$

(4) [逆ベクトルの存在] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し逆ベクトルと呼ばれるベクトル $-\boldsymbol{x}$ が存在して $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$

(5) [ベクトルに関する分配法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と任意の実数 α に対し

$$\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$$

(6) [実数倍に関する分配法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し

$$(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$$

(7) [実数倍に関する結合法則] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と任意の実数 α, β に対し

$$(\alpha\beta)\boldsymbol{x} = \alpha(\beta\boldsymbol{x})$$

(8) [単位倍] 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と実数 1 に対し $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

証明　(1) のみ証明しよう (証明の細部の理解でなく，何故この様な事が必要なのかを理解するように)。ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ とする。実数 a, b, c に対しては結合法則 $a+(b+c) = (a+b)+c$ が成立している。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ は定義により $\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$ である。さらに定義により $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)+z_1 \\ (x_2+y_2)+z_2 \\ (x_3+y_3)+z_3 \end{pmatrix}$ となる。同様に $\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ は $\begin{pmatrix} x_1+(y_1+z_1) \\ x_2+(y_2+z_2) \\ x_3+(y_3+z_3) \end{pmatrix}$ となる。実数の結合法則より，2 つのベクトルの各成分が等しいので $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ が成立する。 ∎

演習問題 1.1　命題 1.1 を証明せよ。

この命題 1.1 を基本的と言ったのは 2 つの理由がある。1 つはベクトルの諸々の性質はこの 8 つの性質から導かれる事である。例えば任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を証明してみよう。成分表示の形を用いなくても，8 つの性質だけから示されるという点がポイントである。

まず，(6) より $0\boldsymbol{x} = (0+0)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}$ が得られる[2]。この両辺に $-(0\boldsymbol{x})$ を加えて，

$$0\boldsymbol{x} + (-(0\boldsymbol{x})) = (0\boldsymbol{x}+0\boldsymbol{x}) + (-(0\boldsymbol{x})) = 0\boldsymbol{x} + (0\boldsymbol{x} + (-(0\boldsymbol{x})))$$

が得られる。性質 (3),(4) を用いると

$$\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{x}$$

が分かる。

演習問題 1.2　次を命題 1.1 から導け (ベクトルの成分表示を用いないで)。

(1) $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$

(2) 任意の実数 α に対し $\alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

もう 1 つはベクトル空間を最も拡張した概念として抽象的ベクトル空間 (または線型空間) があるが，拡張はこの性質をもつものすべてを線型空間と考える事で行われる。この事はまたそのときに注意する。

[2] ここで $0+0=0$ という実数の性質を用いた。