線型解析 I 要綱 #2

2003–4–17　　河野

1.2 部分空間

3 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^3$ の空でない部分集合 W が和と実数倍に関して閉じているときその集合はそれ自身ベクトル空間と見ることができる。つまり次を定義する。

定義 1.2 $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 W が次の 3 つの条件を満たすとき W は $\boldsymbol{R}^3$ の**部分空間** (*subspace*) であるという。

(1) $W \neq \emptyset$

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ に対し $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in W$ と任意の実数 α に対し $\alpha\boldsymbol{x} \in W$

命題 1.3 部分空間 W に対して命題 1.1 の 8 つの性質が成立する。

証明　(3), (4) 以外は全体集合の $\boldsymbol{R}^3$ で成立するので，その部分集合である W で成立する。

W は空集合でないので，W に属するベクトル $\boldsymbol{x}_0$ が存在する。$(-1)\boldsymbol{x}_0$ も W に属し，$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{x}_0 + (-1)\boldsymbol{x}_0$ も W に属する。

演習問題 1.2 より，$-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$ となるので W の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対し $-\boldsymbol{x}$ も W に属する。 ∎

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$ とする。このとき W は定義 1.2 を満たしている。

(1) は例えば $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とすると，$1+(-1)+0 = 0$ なので条件を満たしており，$\boldsymbol{x} \in W$ である。

(2) は W の任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in W$ を示せばよい。$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は W に属しているので $x_1+x_2+x_3 = 0, y_1+y_2+y_3 = 0$ が成立している。$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix}$ であるが，$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)(x3_{+}y_3) = (x_1+x_2+x_3)+(y_1+y_2+y_3) = 0+0 = 0$ より成立が分かる。(3) は W 任意のベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と任意の実数 α に対し $\alpha\boldsymbol{x} \in W$ を示せばよい。$\boldsymbol{x} \in W$ より $x_1+x_2+x_3 = 0$ である。$\alpha\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \end{pmatrix}$ なので $(\alpha x_1)+(\alpha x_2)+(\alpha x_3) = \alpha(x_1+x_2+x_3) = \alpha 0 = 0$ で成立している。

W が幾何的にはどの様な集合になっているかを考える。そのために空間内の平面の方程式について復習しておく[(1)]。平面上の直線の方程式は 1 次式であった。即ち $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \;\middle|\; ax + by + c = 0 \right\}$ は直線を表すし逆も成立した (ただし a, b ともに 0 の場合を除く)。空間内の平面については「空間内の平面の方程式は 1 次式である」，即ち $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz + d = 0 \right\}$ は平面を表すし，平面であれば上のような表示ができる (ただし a, b, c ともに 0 の場合を除く) 。この事を示そう。H を空間内の平面とする。この平面に直交するベクトル (法線ベクトル) が存在するので，それを 1 つ固定し $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とする。H 上の点を 1 つ固定し $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ とする。H 上の任意の点を $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とする。このとき $\boldsymbol{a}$ と $\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}$ は直交しているので，内積は 0 である。ここで $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ の内積 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ であった。よって $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$，即ち $ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$ である。$d = -ax_0 + by_0 + cz_0$ とおくと平面上の点 $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が $ax + by + cz + d = 0$ をみたす事が分かる。この議論を逆にたどると 1 次式で表される図形が平面である事も分かる。さらに $d = 0$ という事と H が原点を通るという事が同値であることも分かる。

W の幾何的な状況の議論に戻ろう。上の事から W の元であるベクトルを位置ベクトルと考えると，法線ベクトルが $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので，それと直交する方向の原点を通る平面上の点に対応する事が分かる。

演習問題 1.3　次の集合で部分空間になるものはどれか考えよ。

(1) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 0 \right\}$

(2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \;\middle|\; x_1 - x_2 + x_3 = 1 \right\}$

[(1)] 学んでいない学生も多いかもしれない。その人達には復習ではないが

(3) $W_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \ x_1 + x_2 = 0, x_2 - 3x_3 = 0 \right\}$

(4) $W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \ x_1 + x_2 = 0 \right\}$

(5) $W_5 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \ x_1 + x_2 = x_3 x_1 \right\}$

(6) $W_6 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \ x_1 x_2 = x_2 x_3 \right\}$

(7) $W_7 = \boldsymbol{R}^3$

(8) $W_8 = \{\boldsymbol{0}\}$

$\boldsymbol{R}^3$ のベクトルを 1 つ固定する (それを $\boldsymbol{x}$ とする)。そのベクトルの実数倍でえられるベクトル全体の集合 $\left\{ \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \ \boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}, \alpha \in \boldsymbol{R} \right\}$ を $\langle \boldsymbol{x} \rangle$ で表す。2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を固定する。そのベクトルの実数倍の和の形のベクトル全体の集合 $\left\{ \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}^3 \middle| \ \boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, a \in \boldsymbol{R}, b \in \boldsymbol{R} \right\}$ を $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ で表す。

一般にベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots \boldsymbol{x}_n$ が与えられたとき，

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n$$

の形のベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ の **1 次結合** (*linear combination*) という。$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ の 1 次結合全体の集合

$$W = \{ \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n | \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \boldsymbol{R} \}$$

は部分空間になる (命題 1.4 参照)。これを $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ によって**生成** (*generate*) される部分空間といい，$\langle \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \rangle$ と書く。

具体例を考えよう。$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする。このとき $\langle \boldsymbol{x} \rangle$ はどの様な集合だろう。$\langle \boldsymbol{x} \rangle$ の任意の元 (ベクトル)$\boldsymbol{y}$ はある実数 α を用いて $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$ と書かれている。$\boldsymbol{y}$ を位置ベクトルと考えると，それが表す点 $Q = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{pmatrix}$ は原点 O と点 $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を結ぶ直線上にある。

$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とする。このとき $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ はどの様な集合だろう。$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ の任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ はある実数 a, b を用いて $\boldsymbol{z} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$ と書かれている。$\boldsymbol{z}$ を位置ベクトルと考えると，

それが表す点 Q はベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ が張る平面上に乗っている。

$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ に対しては $\langle\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\,\rangle=\boldsymbol{R}^3$ となる。これを示そう。一般に集合 A,B が等しいことを示すためには 1) $A\subseteq B$ 及び 2) $B\subseteq A$ を示せばよい。また $A\subseteq B$ を示すには A の任意の元 a が B に含まれる事を示せばよい。

$\langle\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\,\rangle\subseteq\boldsymbol{R}^3$ は明らか(2)。$\boldsymbol{R}^3$ から任意にベクトル $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ をとって来る。このとき $a=\dfrac{z-x}{2}, b=x+y-z, c=\dfrac{3x-z}{2}$ とおくと，$\boldsymbol{w}=a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}+c\boldsymbol{z}\in W$ となるので OK。

上の例のように多くの場合 $\langle\,\boldsymbol{x}\,\rangle$ は直線と，$\langle\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\,\rangle$ は平面と一対一対応がつく。しかし「退化している」場合もある (演習問題 1.4 参照)。

命題 1.4 $W=\langle\,\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n\,\rangle$ は部分空間になる。

証明 $\alpha_0,\dots,\alpha_n$ をすべてを 0 とすると，$\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{x}_1+\cdots+\boldsymbol{x}_n\in W$ なので，$W\neq\emptyset$ である。

W から任意に 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}'$ をとってくると，実数 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, $\alpha'_1,\dots,\alpha'_n$ が存在して $\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n$, $\boldsymbol{x}'=\alpha'_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\alpha'_n\boldsymbol{x}_n$ と書ける。このとき

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'=(\alpha_1+\alpha'_1)\boldsymbol{x}_1+\ldots+(\alpha_n+\alpha'_n)\boldsymbol{x}_n$$

なので，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'\in W$ である。

W の任意のベクトル $\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n$ と任意の実数 α に対し

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha\alpha_1)\boldsymbol{x}_1+\cdots+(\alpha\alpha_n)\boldsymbol{x}_n$$

なので $\alpha\boldsymbol{x}\in W$ である。 ∎

演習問題 1.4 次の部分空間で等しいものはどれか? ただし $\boldsymbol{x}_0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_4=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_5=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_6=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ とする。

(1) $\{\boldsymbol{0}\}$ (2) $\langle\,\boldsymbol{x}_0\,\rangle$ (3) $\langle\,\boldsymbol{x}_1\,\rangle$
(4) $\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\,\rangle$ (5) $\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle$ (6) $\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_4\,\rangle$
(7) $\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,\rangle$ (8) $\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_5\,\rangle$ (9) $\langle\,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_6\,\rangle$
(10) $\langle\,\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_4\,\rangle$ (11) $\boldsymbol{R}^3$

(2) 学生は解答において「**明らか**」という言葉を使用してはいけない (1 回の使用毎に 10 点減点!!)。数学では「明らか」=「私はその事実を簡単に証明できるが，ここでは書かない」という意味である。この他に使用してはいけない言葉として「題意より」がある。